地球惑星科学基礎III 演習 (9)

2015 年 6 月 26 日配布

1　波動方程式の問題

$0 \leq x \leq L$ の領域内で, 1 次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (c > 0) \tag{1}$$

を，境界条件

$$\frac{\partial u(0,\, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,\, t)}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x),\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \tag{3}$$

のもとで解きなさい．ここでは非自明な解（u が恒等的にゼロでない解）でなおかつ $t \to \infty$ で u が発散しない解にのみ注目する.

- 演習の時間には, 問題を小分けにして, 何名かで模範解答を示してください.

2　線形移流方程式の問題

流体力学では, Lagrange 微分と呼ばれる時間微分が定義できる．3 次元空間内のある場の量 $A(\boldsymbol{r}, t)$ に対して, A の Lagrange 微分は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla A \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} + v\frac{\partial A}{\partial y} + w\frac{\partial A}{\partial z} \end{aligned} \tag{4}$$

と書ける．ここで, u, v, w は流速 $\boldsymbol{v}$ の x, y, z 成分である．(4) の第一の表現の右辺第 2 項もしくは, 第二の表現の第 2〜4 項は移流項と呼ばれる．物理量 A はスカラー量でもベクトル量でもよく, もし A が速度 $\boldsymbol{v}$ 自身である場合や, A が $\boldsymbol{v}$ に依存する場合には, 移流

項は速度に関する 2 次以上の項となり非線型項になる．次のような方程式は移流方程式と呼ばれている[1]

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla A = 0. \tag{6}$$

i) 空間 1 次元で, A は速度とは無関係な線形移流方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

を考える．波動方程式の d'Alembert 解を導出したのと同様な手法により, この方程式の解 A の性質について議論しなさい．

---

[1]移流と拡散を含む方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla A = \nu \nabla^2 A. \tag{5}$$

は移流拡散方程式と呼ばれている．