

地球惑星科学基礎III 演習(7)

2015年5月8日配布

1 Fourier変換に関する問題

関数 $f(x)$ の Fourier 変換, 逆変換をそれぞれ $\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk$, と定義する.

- i) a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (1)$$

- b) $a = 3$ として, $f(x)$ とその Fourier 変換を図示しなさい.

- ii) a) 前問の結果を用いて, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka \cos kx}{k} dk$ の値を見積もりなさい.

- b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$ の値を求めなさい.

- iii) a) $f(x)$ が偶関数の時, Fourier 変換の公式は以下のように与えられることを示しなさい.

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx, \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \cos kx dk. \quad (3)$$

ヒント: $\hat{f}(k)$ が (2) で与えられるとき, $\hat{f}(k)$ は偶関数か奇関数か.

- b) $f(x) = e^{-m|x|}$, $m > 0$ の Fourier 変換を求めなさい.

- c) 前設問の結果を用いて,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + m^2} dk = \frac{\pi}{2m} e^{-mx}, \quad (m > 0, x > 0)$$

を示しなさい.

- iv) Fourier 変換に関する以下の性質を証明しなさい. α, β, γ は定数で有限の値を持つとする.

a) $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}$

$$\text{b) } \mathcal{F}\{f(x - \alpha)\} = e^{-ik\alpha} \mathcal{F}\{f(x)\}$$

$$\text{c) } \mathcal{F}\{e^{-\alpha x} f(x)\} = \hat{f}(k - i\alpha)$$

$$\text{d) } \mathcal{F}\{f(\gamma x)\} = \frac{1}{|\gamma|} \hat{f}\left(\frac{k}{\gamma}\right), \quad (\gamma \neq 0)$$

$$\text{e) } f(x) \text{ が微分可能で, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \text{ のとき, } \mathcal{F}\left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}$$

2 Delta関数の問題

i) a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい.¹

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \quad (4)$$

b) $a \rightarrow 0$ の極限では $f(x)$ およびその Fourier 変換はどのような関数になるか述べてなさい.

3 畳み込みに関する問題

$f(x)$ と $g(x)$ の畳み込みを $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u) du$ で定義する. このとき以下の設問に答えなさい.

i) $f * g = g * f$ を証明しなさい.

ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ を証明しなさい.

iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$ を証明しなさい.

iv) 畳み込みの定理 $\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$ を証明しなさい.

¹不連続点 $x = \pm a$ における $f(x)$ の値は, $\{f(x+0) + f(x-0)\}/2$ とする.