

# 地球惑星科学基礎III 演習(6)

2015 年 5 月 8 日配布

## 1 複素 Fourier 級数に関する問題

- i)  $-L < x < L$  の範囲で定義される周期  $2L$  の周期関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad (1)$$

で与えられるとき,  $c_n$  が

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (2)$$

であることを証明しなさい. (実 Fourier 級数を経ずに, (1) を出発点とした議論を行う.)

- ii)  $-L < x < L$  の範囲で  $f(x) = e^{kx}$  と与えられる周期  $2L$  の関数の複素 Fourier 級数表示は

$$f(x) = \frac{\sinh(kL)}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{k + i(n\pi/L)}{k^2 + (n\pi/L)^2} e^{in\pi x/L} \quad (3)$$

となることを証明しなさい. ここで  $k$  は  $k > 0$  である.

- iii)  $0 < x < T$  において  $f(x) = \frac{ax}{T}$  で与えられ, 周期  $T$  の関数 (こぎり波) を図示し, さらに複素 Fourier 級数を求めなさい. ただし,  $a$  は正の実数とする.
- iv)  $0 < x < 1$  において  $f(x) = A \sin \pi x$  で与えられ, 周期 1 で定義される関数の複素 Fourier 級数を求めなさい. ここで  $A$  はある定数とする.
- v)  $-\pi < x < \pi$  の範囲で,  $f(x) = \cos \alpha x$  の関数について, 以下の問いに答えなさい. ここで,  $\alpha$  は整数でないとする.

- a)  $f(x)$  の複素 Fourier 級数表示を求めなさい.

- b)

$$\pi \cos \alpha x = 2 \sin \alpha \pi \left\{ \frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha \cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right\} \quad (4)$$

を証明しなさい.

c) 前設問で  $x = \pi$ ,  $\alpha = z$  とおくことにより,

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

となる. この式が,

$$\frac{d}{dz} \ln \left( \frac{\sin \pi z}{\pi z} \right) = \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \quad (5)$$

となることを示しなさい. ここで  $0 \leq z \leq 1$  とする.

d)

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \quad (6)$$

を証明しなさい.

vi)  $-L < x < L$  の範囲で  $f(x)$  で定義され, 周期  $2L$  の実関数  $f(x)$  の Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (7)$$

を実 Fourier 級数の Parseval の恒等式を使って証明しなさい.

vii)  $-L < x < L$  の範囲で  $f(x)$  で定義され, 周期  $2L$  の関数  $f(x)$  の Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (8)$$

を証明しなさい. (注意: ここで  $f(x)$  は実関数ではない.)

viii)  $a$  を整数でない実数とする. 関数  $f(x) = e^{iax}$ ,  $(-\pi < x < \pi)$ , (周期  $2\pi$ ) を複素 Fourier 級数に展開せよ. さらに Parseval の恒等式を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

を証明しなさい. 注意: この問題では  $f(x)$  は複素関数なので, Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (9)$$

であることに注意しなさい.