

地球惑星科学基礎III 演習(5)

2015年4月17日配布

1 Fourier 級数の問題(2)

- i) a) 以下の関数に対応する Fourier 級数を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (-5 < x < 0) \\ 3, & (0 < x < 5) \end{cases}$$

周期は 10 とする.

- b) 関数 $f(x)$ の不連続点 $x = -5, 0, 5$ において Fourier 級数はどのような値をとるか.

- ii) $-\pi < x < \pi$ において $f(x) = x^2$ となる周期 2π の関数を Fourier 級数展開しなさい.

- iii) 前設問の結果を用いて, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を証明しなさい.¹

- iv) $f(x)$ を $-L < x < L$ で指定された周期 $2L$ の偶関数とする. $f(x)$ の Fourier 級数展開には \sin の項は現われない, 即ち,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (1a)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1b)$$

となることを証明しなさい. (1) は Fourier 余弦級数と呼ばれる.

- v) $f(x)$ を $-L < x < L$ で指定された周期 $2L$ の奇関数とする. $f(x)$ の Fourier 級数展開には \cos の項は現われない, 即ち,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (2a)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2b)$$

となることを証明しなさい. (2) は Fourier 正弦級数と呼ばれる.

¹ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は ζ 関数と呼ばれる.

vi) 以下の関数に対応する Fourier 係数を求めなさい.²

$$f(x) = \begin{cases} 3, & (0 < x < 5) \\ 0, & (5 < x < 10) \end{cases}$$

周期は 10 とする.

²この関数は、 $-\infty < x < \infty$ の範囲で眺めると、i) で考察した関数と同じである。従って、Fourier 級数は a) で求めたものと同じになるはずである。

2 Parseval の恒等式の問題

- i) 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ が区間 $(-L, L)$ において $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$ に収束するとき, Parseval の恒等式

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (3)$$

を証明しなさい.

- ii) 次の関数を Fourier 級数展開しなさい:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x, & (0 \leq x < 2) \\ -x, & (-2 < x < 0) \end{cases}$$

周期 4.

- b) 前設問の Fourier 級数に対応する Parseval の恒等式を書き下しなさい.
c) 前設問の結果をもちいて, 無限級数和

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots \quad (4)$$

を求めなさい.