

## 地球惑星科学基礎III 演習(4)

2015年4月17日配布

### 1 Fourier 級数の問題

i)  $k = 1, 2, 3, \dots$  のとき,  $\int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0$  となることを証明しなさい.

ii) 以下の関係式を証明しなさい. ただし,  $m, n \in \mathbb{N}$  とする.

a)  $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = L\delta_{m,n}$ . ここで,  $\delta_{m,n}$  は Kronecker のデルタである.

b)  $\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$ .

iii)  $-L < x < L$  で与えられ, その区間の外側では周期  $2L$  をもつ実関数  $f(x)$  に関する Fourier 級数

$$f(x) = A + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \quad (1)$$

において,  $m \in \mathbb{N}$  に関して  $a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx$ ,  $b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$ ,  $A = \frac{a_0}{2}$  となることを証明しなさい.

iv) 以下の関数を図示し, その関数の Fourier 係数を求めなさい.

a)  $f(x) = \begin{cases} 3, & (0 < x < 5) \\ -3, & (-5 < x < 0) \end{cases}$   
周期は 10 とする.

b)  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0, & (\pi < x < 2\pi) \end{cases}$   
周期は  $2\pi$  とする.

## 2 種々雑多の問題

- i) 偶関数と偶関数の積は偶関数であることを証明しなさい.
- ii) 奇関数と奇関数の積は偶関数であることを証明しなさい.
- iii) 偶関数と奇関数の積は奇関数であることを証明しなさい.
- iv)  $f_{\text{even}}(x)$ ,  $f_{\text{odd}}(x)$  をそれぞれ偶関数, 奇関数とする. このとき, 以下の式を証明しなさい. ここで  $L$  は正の実数とする.

a) 
$$\int_{-L}^L f_{\text{even}}(x) dx = 2 \int_0^L f_{\text{even}}(x) dx$$

b) 
$$\int_{-L}^L f_{\text{odd}}(x) dx = 0$$