

地球惑星科学基礎III 演習(2)

2014 年 4 月 10 日配布

1 定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式の問題

以下の微分方程式の一般解を求めなさい.

i)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

ii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0$$

iii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

iv)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 25x = 0$$

v)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

vi)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = t^2 + 2e^{3t}$$

vii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 25x = 20 \cos 2t$$

viii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega t$$

ここで, ω, f_0 は実数の定数であるとする.

2 1 階の微分方程式の問題

講義で扱った 2 階の微分方程式のほかにも物理学の研究・勉強で頻繁に現れる微分方程式として 1 階の微分方程式がある. 1 階の微分方程式でも定数係数を持つ場合には, 講義で扱ったのと同様の方法 (“推定法”) で解くことが出来る. その他の場合には変数分離法で解ける場合が多い. (むしろ 1 階の微分方程式は変数分離法で解くことが常套手段のようである.)

変数分離法による 1 階の常微分方程式の解法: 次のような 1 階の常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

において, $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = F(x)G(y) \quad (2)$$

と x のみの関数 $F(x)$ と y のみの関数 $G(y)$ の積としてかける場合, すなわち

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y) \quad (3)$$

と書ける場合を考える. (3) は次のように変形できる:

$$\frac{dy}{G(y)} = F(x)dx. \quad (4)$$

(4) の両辺を積分する

$$\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x)dx \quad (5)$$

ことにより微分方程式 (3) を解くことが出来る (一般解を得ることが出来る). (3) は 1 階の微分方程式なのでその一般解は 1 個の任意定数を含むことに注意しなさい.¹

i) 次の微分方程式を, 以下の 2 つの方法で解きなさい.

$$\frac{dy}{dx} + \omega y = 0. \quad (6)$$

ここで, ω は実数の定数であるとする.

a) 定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式と同様に推定法を用いて解きなさい.

b) 変数分離法を用いて解きなさい.

ii) 次の 1 階の微分方程式を解きなさい.

$$a) \frac{dy}{dx} = 2x$$

¹(5) は不定積分なので, 積分に伴って任意定数であるところの積分定数が出てくる. 左辺の積分で 1 個, 右辺の積分で 1 個出てくるが, これを一まとめにして一つの任意定数に出来る.

$$\text{b) } \frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\text{c) } \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + xy^2}{2y + x^2y}$$

- iii) 次の微分方程式を，前設問 i) の解を参考にして，係数変化法を用いて解きなさい．
 (解は $f(x)$ の積分を含む形で与えられる． $f(x)$ が陽に与えられていないので，その積分は実行できない．したがってここで得られる解は形式解である．)

$$\frac{dy}{dx} + \omega y = f(x).$$

ここで， ω は実数の定数， $f(x)$ は x の既知関数とする．

3 発展問題

- i) 次の連立微分方程式は，大気の下層や海洋の表層の流れを記述する方程式で Ekman 方程式と呼ばれるものである．

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dz^2} - v &= 0, \\ \frac{d^2 v}{dz^2} + u &= U_\infty. \end{aligned}$$

ここで， U_∞ は定数である．

- a) 上記の連立微分方程式の一般解を求めなさい．(u もしくは v のみの 4 階の微分方程式に書き直して，推定法で解く．もしくは，第 1 式と，第 2 式に純虚数 i を掛けたものとを足し， $\hat{u} \equiv u + iv$ に関する 2 階の微分方程式に書き直して推定法で解く．演習問題 (1) で証明した $\sqrt{i} = (1 + i)/\sqrt{2}$ を用いなさい．)
- b) $z \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow U_\infty$, $v \rightarrow 0$, $z = 0$ で $u = 0, v = 0$ という境界条件を満足する解を求めなさい．(各 z に対して u, v をプロットすると螺旋を描く．この螺旋は Ekman 螺旋と呼ばれる．)