

地球惑星科学基礎 III 演習 (11)

山崎 和仁

2015 年 7 月 4 日掲載

1 Cauchy-Riemann の関係式と正則性

以下の問題を、Cauchy-Riemann の関係式を使って解け。全て、 $z = x + iy$ とする。

問題 1.1 z は全平面で正則であることを示せ。

問題 1.2 \bar{z} は全平面で正則でないことを示せ。

問題 1.3 $1/z$ は $z = 0$ を除き正則であることを示せ。

問題 1.4 z^2 は全平面で正則であることを示せ。

2 Cauchy の積分定理

問題 2.1 $C : |z| = 1$ とする。つまり、積分路を原点を中心とする半径 1 の円周とする。このとき、以下の積分でゼロになるものをあげよ。

$$\oint_C z^2 dz \quad (1)$$

$$\oint_C \frac{1}{z - 0.1} dz \quad (2)$$

$$\oint_C \frac{1}{z - 100} dz \quad (3)$$

ヒント：式 (2) は $z = 0.1$ で正則ではない。式 (3) は $z = 100$ で正則ではない。

3 Laurent 展開に基づく留数の求め方

問題 3.1 $C : |z - 1| = 1$ において

$$\oint_C \frac{\sin z}{z - 1} dz \quad (4)$$

を求めよ。(ヒント：特異点 $z = 1$ は 1 位の極。)

問題 3.2 $C : |z - 1| = 1$ において

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z - 1)^4} dz \quad (5)$$

を求めよ。(ヒント：特異点 $z = 1$ は 4 位の極。)

4 留数定理

問題 4.1 以下の積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2 - 1} dz \quad (6)$$

を $C : |z| = 2$ および $C : |z - 1| = 1$ の場合にそれぞれ求めよ。(ヒント： $z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$ から、特異点は $z = 1$ および $z = -1$ でともに 1 位の極。)

問題 4.2 以下の積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz \quad (7)$$

を $C : |z| = 2$ および $C : |z - i| = 1$ の場合にそれぞれ求めよ。(ヒント： $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$ から、特異点は $z = i$ および $z = -i$ でともに 1 位の極。)

5 複素関数積分に基づく実数関数積分

以下の各式を証明せよ。

問題 5.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

問題 5.2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{\pi}{3} \quad (9)$$