地球惑星科学基礎 III 演習 (10)

2015 年 7 月 4 日掲載

注:問題を小分けにして手分けして解いてもよい

1　曲線座標系における Laplace 方程式の問題

i) 3 次元球座標系の場合の勾配演算子, 単位ベクトルの微分, ベクトルの発散, Laplacian は以下のようになることを導きなさい. 注:ここに書かれていない単位ベクトルの微分はゼロである.

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\sin\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos\theta\, \boldsymbol{e}_r + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{4}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}. \tag{5}$$

ii) 3 次元円柱座標系の場合の勾配演算子, 単位ベクトルの微分, ベクトルの発散, Laplacian は以下の様になることを導きなさい. 注:ここに書かれていない単位ベクトルの微分はゼロである.

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_\rho, \tag{7}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{8}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{9}$$

2　Laplace 方程式と特殊関数

i) 3 次元球座標系において, 変数分離を行うことにより場の θ 依存性は, Legendre の陪微分方程式

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0, \tag{10}$$

に従うことを示しなさい.

ii) 2 次元円柱座標系における Laplace 方程式を導き, Laplace 方程式の解の動径座標依存性に関する式が

$$r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-n^2R=0 \tag{11}$$

となることを導きなさい. ここで, n は整数である.

3 Green 関数

i) 2 次元 Laplace 方程式の Green 関数が, $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+c$ となることを示しなさい. ここで, c は任意定数であり, $r\mathrm{d}G/\mathrm{d}r|_{r=r'}=0$ とする.

ii) 次の 1 次元微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2G(y;y')}{\mathrm{d}y^2}-k^2G(y;y')=\delta(y-y') \tag{12}$$

に従う Green 関数が,

$$\begin{aligned} G(y;y') &= \frac{\sinh k(y-1)\sinh ky'}{k\sinh k}, \quad (y>y') \\ &= \frac{\sinh k(y'-1)\sinh ky}{k\sinh k}, \quad (y<y') \end{aligned} \tag{13}$$

となることを示しなさい. ここで, $y-y'\to\pm\infty$ で $G(y;y')\to\infty$, $G(y'+0;y')=G(y'-0;y')$ とする.