第 9 章

2 階の線形偏微分方程式の分類

これまでの 3 章で, 3 つの偏微分方程式, 拡散方程式, 波動方程式, Laplace–Poisson 方程式を議論してきた. 本章では, 一般的な形の 2 階線形偏微分方程式の型の分類を行い, これらの 3 つの方程式はその代表例であることを解説する.[*1]

9.1 はじめに

以下の形で与えられる 2 階偏微分方程式を考察する:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right). \tag{9.1}$$

ここで, A, B, C は既知の x, y の関数であり, Φ は $u, u_x (\equiv \partial u/\partial x)$ 等の非線形の関数であってもよい. このような微分方程式は, 基本的な 3 つの型に分類できることを本稿では述べる. そのためにまず特性曲線を導入し, 次に特性曲線に沿う座標変数で (9.1) を書き直すことにより基本的な 3 つの型への分類を行う.

9.2 特性曲線

x, y 平面内で曲線 Γ を考える. この曲線上で u が与えられており, 曲線の法線方向を $\boldsymbol{n}$ としたときに, Γ 上で u の法線方向微分 u_n が与えられているとする. Γ に沿って u が知られているので u の曲線に沿う方向 $\boldsymbol{s}$ の微分 u_s もわかっている. そこで, 曲線上 Γ で u_x, u_y もわかっていることになる. このような曲線 Γ 上で, 微分方程式 (9.1) が解ける条件を考える.

[*1] Sommerfeld(Partial Differential Equations in Physics, Academic Press,1949) を参考にこの章を作成した.

次のような記号を導入する:

$$p = u_x,\quad q = u_y,\quad r = u_{xx},\quad s = u_{xy},\quad t = u_{yy}.$$

r, s, t を用いると (9.1) は

$$Ar + 2Bs + Ct = \Phi, \tag{9.2}$$

と書ける．また一般的に

$$\mathrm{d}p = r\,\mathrm{d}x + s\,\mathrm{d}y, \tag{9.3a}$$

$$\mathrm{d}q = s\,\mathrm{d}x + t\,\mathrm{d}y, \tag{9.3b}$$

が成り立ち, もちろん Γ 上でもこの関係式は成り立つ．Γ 上で Φ, p, q は知られているので, (9.2), (9.3) は,

$$\begin{pmatrix} A & 2B & C \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & 0 \\ 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}q \end{pmatrix}, \tag{9.4}$$

と書けて, r, s, t を求める問題に帰着される．(9.4) は

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & 0 \\ 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{vmatrix} = A(\mathrm{d}y)^2 + 2B(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) + C(\mathrm{d}x)^2,$$

がセロでないときに r, s, t を決定できる．

しかしながら, 一般的に x, y 平面内のあらゆる点で $\Delta = 0$ となるような方向が 2 つ存在することが知られている．なぜなら, $\Delta = 0$ は $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ に関する 2 次方程式とみなすことができ, 一般にそれは 2 つの解を持つからである．$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は曲線の傾きを与えるので, したがってこのことは $\Delta = 0$ を満足する 2 つの曲線の属が存在する．その曲線は Monge に従って, 特性曲線 (characteristics) と呼ばれている．

微分方程式 (9.1) の可解に関する必要条件は, Γ が至る所で特性曲線に接していない, である．

特性曲線,

$$A(\mathrm{d}y)^2 + 2B(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) + C(\mathrm{d}x)^2 = 0, \tag{9.5}$$

の議論をしよう．(9.5) を $(\mathrm{d}x)^2 (\neq 0)$ でまとめ, 解を求めると,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \tag{9.6}$$

を得る．(9.6) を積分することにより, x, y 平面内の曲線を得る．一般に x, y 平面内の曲線は, $f(x, y) = \mathrm{const.}$ のように表現することができるが, この定数が (9.6) の根号内の符

号によって実数になったり, 複素数になったり, さらには特性曲線が一つしかない場合に分類される.

A, B, C が以下のような関係を満足する場合を考えよう:

i) $B^2 - AC > 0$: この場合には, 特性曲線は 2 つの異なった実の定数で表現される. このような A, B, C を持つ偏微分方程式は双曲型と呼ばれ, 波動方程式がその代表例である.

ii) $B^2 - AC = 0$: この場合には, 特性曲線は 1 つの実の定数で表現される. このような A, B, C を持つ偏微分方程式は放物型と呼ばれ, 拡散方程式がその代表例である.

iii) $B^2 - AC < 0$: この場合には, 特性曲線は 2 つの互いに共役な複素の定数で表現される. このような A, B, C を持つ偏微分方程式は楕円型と呼ばれ, Laplace 方程式がその代表例である.

9.3　座標変換

9.3.1　双曲型

今, x, y 平面内で,

$$\varphi(x,y) = \text{const.}, \qquad \psi(x,y) = \text{const.} \tag{9.7}$$

となる曲線群を考えて, それに沿った新しい座標系,

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y) \tag{9.8}$$

を考えて, この座標系で偏微分方程式 (9.1) を書き換えてみよう. ここで, 定数は実数とする. x, y による偏微分は,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varphi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \psi_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{9.9a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \varphi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \psi_y \frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{9.9b}$$

と変換され, したがって 2 階微分は,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \varphi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\varphi_x\psi_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \psi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varphi_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi} + \psi_{xx} \frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{9.10a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \varphi_x\varphi_y \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \psi_y\psi_y \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varphi_{xy} \frac{\partial}{\partial \xi} + \psi_{xy} \frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{9.10b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \varphi_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\varphi_y\psi_y \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \psi_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varphi_{yy} \frac{\partial}{\partial \xi} + \psi_{yy} \frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{9.10c}$$

これらを用いて (9.1) を書き換えると,

$$
\begin{aligned}
&(A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\
&+2\left\{A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\
&+(A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Psi\left(u,\, u_\xi,\, u_\eta,\, \xi,\, \eta\right),
\end{aligned}
\tag{9.11}
$$

を得る．ここで, Ψ は u, u_ξ, u_η, ξ, η を含む関数である．

(9.7) から, 曲線に沿って,

$$
\varphi_x \mathrm{d}x + \varphi_y \mathrm{d}y = 0, \tag{9.12}
$$

が成り立つ．したがって, $\mathrm{d}x \neq 0$ として,

$$
\varphi_x = -\varphi_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \tag{9.13}
$$

を得る．これを (9.11) に代入すると, 左辺第一項の係数は,

$$
A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = \left\{A\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + C\right\}\varphi_y^2,
$$

となり, もし, $\varphi(x,y) = \mathrm{const.}$ を特性曲線に選んでおけば, (9.11) の右辺第一項はゼロである．同様に, $\psi(x,y) = \mathrm{const.}$ を特性曲線に選べば (9.11) の右辺第三項はゼロである．したがって, (9.1) は (左辺第 2 項の係数で両辺を割って)

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = X_h(u, u_\xi, u_\eta, \xi, \eta), \tag{9.14}
$$

となる．

1 次元波動方程式,*2

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{9.15}
$$

において, (9.8) を計算すると, $A = c^2, B = 0, C = -1$ であるから,

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm c^{-1}, \tag{9.16}
$$

となる．上の式は,

$$
\varphi(x,y) = x + cy = \xi, \quad \psi(x,y) = x - cy = \eta, \tag{9.17}
$$

*2 時間の変数を標準的な表記の t でなく y と記している．

という 2 つの特性曲線を与える．$\varphi_x = 1,\ \varphi_y = c,\ \psi_x = 1,\ \psi_y = -c$ であるので,

$$\begin{aligned}
&A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0,\\
&A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y = 2c^2,\\
&A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = 0,
\end{aligned}$$

となり, 確かに (9.14) と同様の,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0,$$

に変換される．

9.3.2　放物型

特性曲線が 1 つしか存在しない場合を考える．このとき, 例えば x は変換せず, 独立変数を x,ξ とする．このとき,

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad x = \eta = \psi(x,y), \tag{9.18}$$

と変換する．関数 ψ の微分は,

$$\psi_x = 1, \qquad \psi_y = 0, \tag{9.19}$$

である．(9.11) の右辺第 1 項の係数は, 双曲型と同様にゼロになる．さらに, (9.11) の右辺第 2 項の係数は, (9.19) を用いると,

$$A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y = A\varphi_x + B\varphi_y, \tag{9.20}$$

である．放物型の特性曲線は, $B^2 - AC = 0$ で特徴づけられることを用いて,

$$\begin{aligned}
A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi^2 &= A^{-1}\left[(A\varphi_x + B\varphi_y)^2 - (CA - B^2)\varphi^2\right]\\
&= A^{-1}\left(A\varphi_x + B\varphi_y\right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

したがって, (9.11) の左辺第 2 項の係数もゼロとなる．よって, (9.1) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X_p(u, u_x, u_\xi, x, \xi), \tag{9.21}$$

となる．

(空間)1 次元拡散方程式,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \kappa^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{9.22}$$

は明らかに, (9.21) と同じ型をしていることがわかる．(前と同様に時間の変数を y と表記している.)

9.3.3　楕円型

この場合には, 双曲型と同じ議論になる．ただし, 曲線を表す定数が共役な複素数となる．したがって, ξ, η は複素数である．ここで, 次のような新しい実の座標系 ξ', η' を導入する:

$$\xi' = \xi + \eta, \qquad i\eta' = \xi - \eta, \tag{9.23}$$

もしくは

$$\xi = \frac{1}{2}(\xi' + i\eta'), \qquad \eta \equiv \frac{1}{2}(\xi' - i\eta'). \tag{9.24}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi'} - i \frac{\partial}{\partial \eta'} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi'} + i \frac{\partial}{\partial \eta'} \right). \end{aligned} \tag{9.25}$$

したがって,

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta'^2} \right). \tag{9.26}$$

つまり, (9.1) は,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta'^2} = X_e(u, u_{\xi'}, u_{\eta'}, \xi', \eta'), \tag{9.27}$$

と表せる．

2 次元 Laplace-Poisson 方程式,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y), \tag{9.28}$$

は明らかに, (9.21) と同じ型をしていることがわかる．