第 7 章

波動方程式

偏微分方程式の代表例として, 拡散方程式の他に波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \tag{7.1}$$

がある. 真空中の Maxwell 方程式, たわみなく張られた弦の微小振幅振動, 浅い水の自由表面変位変動, 圧縮性流体の断熱運動など, 波動方程式として書かれる現象は非常にたくさんある. ここでは, 有限の領域内での波動方程式の解法について紹介する. 前章では無限領域での拡散方程式の解法を示したが, 有限領域での拡散方程式も, ここで紹介する方法で解くことができる. 逆に無限領域内での波動方程式は, 前章で紹介した方法で解くことができる.

本章で必要な知識は, 方程式の線形性, 定数係数の線形常微分方程式の解法, 解の重ね合わせ, Fourier 級数である. 即ち, 本講義で扱った知識のほとんどが必要となる.

本章では簡単化のため空間 1 次元の波動方程式,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.2}$$

を考える. ここで, c は時間, 空間に依存しない実数で, 正値でも負値でも構わないがこの章では $c > 0$ としておく.

7.1 d'Alembert 解

波動方程式 (7.2) を解く前に先ず, 波動方程式を満たす解の一般的性質について議論する. (7.2) は, 2 つの独立変数 x, t を含むが, 次のような新しい 2 つの独立変数 ξ, η を導入してみよう:

$$\xi \equiv x + ct, \tag{7.3}$$

$$\eta \equiv x - ct. \tag{7.4}$$

波動方程式の独立変数を x, t から ξ, η に変換する．t 及び x に関する偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\eta}=c\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}, \tag{7.6}$$

となる．これらを波動方程式に代入すると, (7.2) は

$$4c^2\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}u=0 \tag{7.7}$$

となる．この方程式を ξ について積分すると,

$$\frac{\partial}{\partial\eta}u=G(\eta) \tag{7.8}$$

となり, さらに η について積分すると,

$$u=f(\xi)+\int^{\eta}G(\eta')\,\mathrm{d}\eta'=f(\xi)+g(\eta). \tag{7.9}$$

ここで, f, G はそれぞれ ξ, η の**任意関数**である．また $g(\eta)\equiv\int^{\eta}G(\eta')\,\mathrm{d}\eta'$ も η の任意関数である．

(7.9) の最後の表現が波動方程式 (7.2) の一般解で, **d'Alembert 解**と呼ばれている．常微分方程式では一般解は任意定数を含んだが, 偏微分方程式の場合には一般解は**任意関数**の形で与えられる．初期条件と境界条件を考慮することにより, 任意関数の形が決まる．

$f(\xi)$ の意味は, 次のとおりである．ξ が時刻 t_0 にある値 (例えば ξ_0) をとる場所 x_0 が時間と共にどのように移動するかを眺めてみる．$\Delta t(>0)$ ののちに $\xi=\xi_0$ となる場所を x_1 とすると, それは $\xi_0=x_1+c(t_0+\Delta t)=x_0+ct_0$．したがって,

$$x_1-x_0=-c\,\Delta t(<0) \tag{7.10}$$

つまり, x_1 は x_0 よりも x の小さな方向に移動していることになる．つまり, x の正の方向を右にとると, ξ が ξ_0 となる点は時間が経つにつれて左に移動することになる．その速さは, Δt の間に $|x_1-x_0|$ だけ移動するので, $|x_1-x_0|/\Delta t=c$. つまり, 速さは c である．従って, $f(\xi)$ は x の負の方向に速さ c で進行していく解を表現している．同様な考察により $\eta=\eta_0$ の点は時間と共に x の正の方向に速さ c で進行していく．そこで, $g(\eta)$ は x の正の方向に速さ c で進行していく解を表現している．このように (7.2) は x の正の方向に速さ c で進行していく解と, x の負の方向に速さ c で進行していく解の重ね合わせになっている．なお, ξ, η は**位相**と呼ばれ, c は位相が進行していく速さなので**位相速度**と呼ばれる.[*1]

[*1] 波の塊（波束）の重心が進行していく速さとしての, **群速度**と呼ばれる速度も波動の問題には登場する．

7.2　変数分離法を用いた波動方程式の解法の例

$0 \le x \le L$ の領域内で, 1 次元波動方程式,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (c > 0), \tag{7.11}$$

を，境界条件,

$$u(0,\, t) = u(L,\, t) = 0, \tag{7.12}$$

と初期条件,

$$u(x, 0) = f(x),\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \tag{7.13}$$

のもとで解くことを考える.[*2] f, g は具体的な形はここでは指定していないが, 既知の関数である．ここでは非自明な解（u が恒等的にゼロでない解）でなおかつ $t \to \infty$ で u が発散しない解にのみ注目する．(7.11) が $0 < x < L$ の間に張られた弦の振動の方程式を記述する場合, u は弦の振幅であり, (7.12) は弦の両端が固定されている場合に相当する．また (7.13) の初期条件は, 拡散方程式の場合と異なり, 2 つあることを注意しておく．拡散方程式では時間に関して 1 階の微分しか含まないので, 初期条件は 1 つであったが, 波動方程式は時間に関して 2 階の微分を含むので, この方程式を解いて完全に解を決定するためには, ある時間における u の値に関する条件を 2 つ必要とするからである．

7.2.1　波動方程式の線形性

方程式 (7.11) は線形の微分方程式であることが確かめられる．(7.11) の独立な解を u_1, u_2, 任意定数を c_1, c_2 とする．このとき， $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ が (7.11) の解であることが確かめられるので，(7.11) は線形の微分方程式である．

7.2.2　波動方程式の解法

ステップ１：　(7.11) を変数分離法を用いて解く．(7.11) の解を

$$u(x,\, t) = X(x)T(t) \tag{7.14}$$

[*2] この問題のように境界において関数がある与えられた値を持つという条件の問題は, Dirichlet 問題と呼ばれ, いっぽう関数の微分の値が境界において指定された問題は, Neuman 問題と呼ばれる．

と表現し, $T(t)$, $X(x)$ がそれぞれ満たす微分方程式を求める.[*3] (7.14) を (7.11) に代入し，両辺を $c^2XT(\neq 0)$ で割る[*4]と

$$\frac{1}{c^2\,T}\,\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{X}\,\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} \tag{7.15}$$

を得る．上式の左辺は t のみの関数，右辺は x のみの関数なので等式が成立するには，両辺が x にも t にも依存しない定数である必要がある．そこで，その定数（変数分離定数と呼ばれる）を λ と置く．したがって，T, X の満たす微分方程式はそれぞれ

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}=c^2\lambda T, \tag{7.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=\lambda X, \tag{7.17}$$

である．このように, (7.14) のように解を仮定することにより, 偏微分方程式 (7.11) は常微分方程式に変換された．**この段階では，変数分離定数 λ の符号は決定できない．後に続く議論が必要であることに注意してほしい．**

ステップ２： 上で導かれた T に関する微分方程式 (7.16) の一般解を推定法で求める．$T=e^{\alpha t}$ と解を推定し，これを (7.16) に代入し，整理すると特性方程式 $\alpha^2=c^2\lambda$ が得られる．T の従う微分方程式は線形の微分方程式なので，$\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$ を任意定数として, 一般解は $T=\hat{T}_1e^{c\sqrt{\lambda}t}+\hat{T}_2e^{-c\sqrt{\lambda}t}$ である．ここで，$\lambda>0$ ならば, $t\to\infty$ のとき T は発散し，したがって u も発散する．設問にあるようにこのような発散解には興味がなく, 有限に留まる解を調べる．そこで $t\to\infty$ で T が有限値に留まるために，変数分離定数を $\lambda=-k^2(\leq 0)$ とする．変数分離定数をこのようにおくと，一般解は $k\neq 0$ のとき

$$T(t)=\hat{T}_1e^{ickt}+\hat{T}_2e^{-ickt} \tag{7.18}$$

と表現できる．なお, あとの便利のために (7.18) を Euler の関係式を用いて

$$T(t)=T_1\cos ckt+T_2\sin ckt \tag{7.19}$$

と書き直しておく．ここで, T_1, T_2 も任意定数で, $T_1=\hat{T}_1+\hat{T}_2$, $T_2=i(\hat{T}_1-\hat{T}_2)$ である．一方, $k=0$ のとき, $T(t)=T_3t+T_4$ である．T_3, T_4 は任意定数である．

ステップ３： 上で導かれた X に関する微分方程式の一般解を求める．X に関する微分方程式 (7.17) の解として，$X=e^{\beta x}$ と推定する．この解を (7.17) に代入し整理す

[*3] 変数分離法の名前の由来は, (7.14) のように方程式の解が x だけの関数と t だけの関数に分離できる，としているからである．

[*4] $XT=0$ は自明な解である．

ると，特性方程式 $\beta^2 = \lambda = -k^2$ を得る．この解は $\beta = \pm ik$ である．X の従う微分方程式は線形なので，重ね合わせの原理より一般解は

$$X(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}, \qquad (k \neq 0) \tag{7.20}$$

と表現できる．ここで，C_1, C_2 は任意定数である．一方, $k = 0$ のとき, $X(x) = C_3 x + C_4$ である. C_4, C_4 も任意定数である.

ステップ４： 次に境界条件を考慮する. 先ず, 境界条件 (7.12) は $u(x, t)$ に関する条件になっている．これを $X(x)$ に関する条件に書き換える. $x = 0$ における境界条件を $u(x, t) = X(x)T(t)$ に代入すると，$X(0)T(t) = 0$ となる．もし，$T(t) = 0$ であれば，$u(x, t) = 0$ となり自明な解になってしまうので，$T(t) \neq 0$ であり，したがって，$X(0) = 0$ が得られる．$x = L$ についても同様の議論を行い，$X(L) = 0$ を得る．まとめると,

$$X(0) = X(L) = 0. \tag{7.21}$$

ステップ５： (7.21) で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求める．$x = 0$ を一般解 (7.20) に代入し，境界条件を考慮すると，$C_1 + C_2 = 0$ を得る．これより, $C_2 = -C_1$ である．さらに $x = L$ を一般解 (7.20) に代入し, 境界条件を考慮すると，$C_1 e^{ikL} - C_1 e^{-ikL} = 2iC_1 \sin kL = 0$ を得る．$C_1 = 0$ は自明な解なので，$C_1 \neq 0$ とすると，上の式が成り立つためには $kL = n\pi$, ここで n は $k \neq 0$ であることから, 0 をのぞく整数でなければいけない．なお, $k = 0$ の時には, $X(0) = 0$ から $C_4 = 0$, $X(L) = 0$ から $C_3 = 0$, つまり $X = 0$ となり自明な解になってしまう. したがって, 題意より変数分離定数が 0 の場合は以降は考えなくてよい. $2iC_1$ を改めて C とおくと，境界条件を満足する X は

$$X(x) = C \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad (n \text{ は } 0 \text{ を除く整数}) \tag{7.22}$$

となる．

ステップ６： 重ね合わせの原理により $u(x, t)$ を求める. 上で求めた，T, X から, 解 u は

$$u(x, t) = X(x)T(t) = \left\{ T_1 C \cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) + T_2 C \sin\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{7.23}$$

となる．ここで，(7.23) はある整数 n に対して与えられた境界条件を満足する (7.11) の解である．異なる n に対しても (7.23) は (7.11) の解であり, それらは互いに独立である. (7.11) は線形の微分方程式なので，独立な解が得られたらそれら

を重ね合わせたものも, もとの微分方程式の解である．そこで，重ね合わせの原理から

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=-\infty,(n\neq 0)}^{\infty} \left\{\hat{D}_n \cos\omega_n t + \hat{E}_n \sin\omega_n t\right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \{D_n \cos\omega_n t + E_n \sin\omega_n t\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (7.24)
\end{aligned}
$$

が境界条件を満足する (7.11) の一般解である．ここで，T_1C を $\hat{D}$, T_2C を $\hat{E}$ と表現し，さらにその値は n の値によって異なってもよいので，そのことを明示するために $\hat{D}_n$, $\hat{E}_n$ とした．また, $D_n = \hat{D}_n - \hat{D}_{-n}$, $E_n = \hat{E}_n + \hat{E}_{-n}$ と表現している．さらに,

$$
\omega_n = \frac{cn\pi}{L} \qquad (7.25)
$$

と表現した．

ステップ 7： 最後に初期条件を満足する $u(x,\,t)$ を求める．前設問で得られた解に初期条件を考慮する．即ち

$$
u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x). \qquad (7.26)
$$

$$
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x). \qquad (7.27)
$$

(7.26), (7.27) の式の真ん中と最後の表現に $\sin(m\pi x/L)$ をかけて x について 0 から L まで積分する．ここで, m は正の整数である．**Fourier 係数の公式を導出する際に用いた方法と同じ事を行う．安直に Fourier 係数の公式に頼ってはダメである．**なぜなら, Fourier 級数は周期境界条件が課されているが, ここでの境界条件はそのようになっていないからである．このとき $\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{mn}$ なので,

$$
D_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad (7.28)
$$

$$
E_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad (7.29)
$$

を得る．この表現を，(7.24) に代入して, 最終的に与えられた初期条件，境界条件

を満足する (7.11) の解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{2}{L}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}\,\mathrm{d}x'\right\}\cos\omega_n t \right.$$
$$\left. + \left\{\frac{2}{L\omega_n}\int_0^L g(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}\,\mathrm{d}x'\right\}\sin\omega_n t\right]\sin\frac{n\pi x}{L} \quad (7.30)$$

を得る．初期条件の関数形 f, g が具体的に与えられれば, (7.30) に含まれる積分が実行できる．

7.2.3 d'Alembert 解との関係

前小節で導出した解と d'Alembert 解との関係を見てみる．

$$\cos\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{L}x = \cos\frac{cn\pi}{L}t\,\sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{1}{2}\left\{\sin\frac{n\pi}{L}(x+ct) + \sin\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\sin\frac{n\pi}{L}\xi + \sin\frac{n\pi}{L}\eta\right\}, \quad (7.31)$$
$$\sin\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{L}x = \sin\frac{cn\pi}{L}t\,\sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{n\pi}{L}(x-ct) - \cos\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{n\pi}{L}\eta - \cos\frac{n\pi}{L}\xi\right\}, \quad (7.32)$$

である．そこで (7.30) は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{1}{L}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}\,\mathrm{d}x'\right\}\left\{\sin\frac{n\pi}{L}\xi + \sin\frac{n\pi}{L}\eta\right\}\right.$$
$$\left. + \left\{\frac{1}{L\omega_n}\int_0^L g(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}\,\mathrm{d}x'\right\}\left\{\cos\frac{n\pi}{L}\eta - \cos\frac{n\pi}{L}\xi\right\}\right] \quad (7.33)$$

と書き直せる．つまり, d'Alembert 解が示すように, (7.30) は ξ と η の関数の和になっている．

7.3 コメント

波動方程式を変数分離法で解くためには, 7.2 節で見たように本講義で今まで扱ったほとんどすべての知識が必要となる．今までの講義の復習の意味も兼ねて, 境界条件が (7.12) ではなく,

$$\frac{\partial u(0,\,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,\,t)}{\partial x} = 0, \quad (7.34)$$

の場合にも変数分離法により波動方程式を解いてみよう． さらには, 前章で扱った拡散方程式も同様の方法で解ける． 2 つの異なる境界条件 ($C(0,t) = C(L,t) = 0$, $\frac{\partial C(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial C(L,t)}{\partial x} = 0$) のもとで変数分離法を用いて 1 次元拡散方程式 $\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ を解いてみよう. 解法を眺めているだけでなく, 実際に手を動かして, 丁寧に解いて見ることで理解が深まります.