第 10 章

複素解析

拡散方程式の解法の際に使用した複素関数の積分に関連して, 複素関数に関する基本的な事項と複素積分について解説しておく.[*1] なお, 複素関数の知識は, 実関数の積分だけでなく, 特殊関数の議論や流体力学における非粘性流体中におかれた物体の周りの流れ場を計算するとき[*2]など, 非常に広範囲に利用される. 講義では十分に紹介する時間がないので, ガイダンス時に紹介したテキストを各自勉強してさらに知識を深めてほしい.

10.1 複素数の復習

最初に複素数の復習から始める. 実数を x, y とする時, 複素数 z が次式で定義される：

$$z = x + iy. \tag{10.1}$$

ここで, i は $i^2 = -1$ を満たす虚数である. 複素共役は

$$z^* = x - iy \tag{10.2}$$

で与えられる.[*3] この時, 絶対値 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ に対し, $|z|^2 = zz^*$ が成立する.

複素数を表示する座標平面を複素平面などという (図 10.1). この時, 横軸は実軸, 縦軸は虚軸になる.

z と実軸の成す角度を θ とすると, 上図より $\cos\theta = x/|z|$, $\sin\theta = y/|z|$ となる. この

[*1] 山崎和仁 のノートを改編.

[*2] 等角写像と呼ばれる手法.

[*3] 複素共役は上付き線で表すこともあるが, 以前の章における記述と整合性を保つために, アスタリスクを使うことにする.

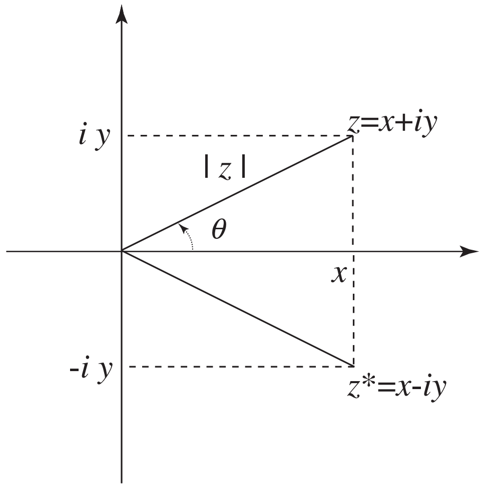

図 10.1　複素平面.

時, 式 (10.1) は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned} z &= x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

ここで, $|z| = r$ と置き, Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を使った．この, $z = re^{i\theta}$ なる形を複素数の極形式と呼ぶ.

10.2　正則関数

10.2.1　“正則” とは

複素数 $z = x + iy$ を変数とする複素関数 $f(z)$ を考える．$f(z)$ が点 z_0 の近傍の全ての点で微分可能であるとき, $f(z)$ は点 z_0 で正則であるという．ここで, “近傍の全ての点で微分可能” とは, どちらの方向から点 z_0 に近づいても, 微分の結果が同じである事を意味する．複素関数の z_0 における微分は以下のように定義する:

$$f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} \equiv \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

具体例を以下に記す.

例 1:　$f(z) = z = x + iy$ は正則である.

$f(z)$ を z で微分する：

$$f'(z) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{z + \triangle z - z}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle z}{\triangle z} = 1. \tag{10.4}$$

微分結果が経路に依存しないので, あらゆる z において正則である.

例 2:　$f(z) = z^* = x - iy$ は正則でない.

$f(z)$ を z で微分する：

$$f'(z) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{(z + \triangle z)^* - z^*}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle z^*}{\triangle z} \tag{10.5}$$

ここで, $\triangle z = \triangle x + i\triangle y$ から,

$$f'(z) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle x - i\triangle y}{\triangle x + i\triangle y} \tag{10.6}$$

ここで, 以下の二つの経路で微分点に近づく.

(経路 1) 実数軸から近づく. すなわち, $\triangle y = 0$ として $\triangle x \to 0$.
(経路 2) 虚数軸から近づく. すなわち, $\triangle x = 0$ として $\triangle y \to 0$.

経路 1 の結果は

$$f'(z) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle x} = 1 \tag{10.7}$$

経路 2 の結果は

$$f'(z) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{-i\triangle y}{i\triangle y} = -1 \tag{10.8}$$

つまり, 経路によって微分値が異なるので, $f(z) = z^*$ はあらゆる z において正則でないことが分かる.

正則性に関する重要な事実として,

$\boxed{f(z) = 1/z \text{ は, } z = 0 \text{ の点を除いて正則である.}}$

というものがある.

10.2.2　Cauchy-Riemann の関係式

ある関数が与えられた時に, そのたびごとに前小節のようなやり方で関数の正則性を調べるのは手間がかかる. より簡単に関数の正則性を調べる方法をここで導入する.

複素 $z=x+iy$ を変数とする関数 $f(z)$ （複素関数) の実部と虚部をそれぞれ u, v とする．u, v は実数 x, y に依存する実関数である:

$$f(z)=u(x,\,y)+iv(x,\,y). \tag{10.9}$$

$f(z)$ を z_0 において, z に関して微分する:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}&=\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{\{u(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y)\}-\{u(x_0,\,y_0)+iv(x_0,\,y_0)\}}{\Delta x+i\Delta y}\\&=\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}.\end{aligned} \tag{10.10}$$

ここで, 偏微分は $z_0=x_0+iy_0$ の点で見積もるものとする．

再び, 以下の二つの経路で微分点に近づく．

(経路 1) 実数軸から近づく．すなわち, $\triangle y=0$ として $\triangle x\to 0$.

(経路 2) 虚数軸から近づく．すなわち, $\triangle x=0$ として $\triangle y\to 0$.

経路 1 の結果は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x}{\Delta x}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned} \tag{10.11}$$

経路 2 の結果は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y}{i\Delta y}\\&=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned} \tag{10.12}$$

関数が正則であるためには, 関数の微分が経路によらず同じ値にならなければいけない. そこで, (10.11) と (10.12) を等しいとすると偏微分係数の間に次の関係式が成立する：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}}, \tag{10.13}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}}. \tag{10.14}$$

(10.13) と (10.14) を Cauchy-Riemann の関係式という．上で述べた (10.13), (10.14) の導出は, Cauchy-Riemann の関係式が複素関数 $f(z)$ が正則であるための必要条件であることを述べている．上の議論を逆にたどることにより, Cauchy-Rimeann の関係式は $f(z)$ が正則であるための十分条件でもあることがわかる．そこで, 次の定理が導かれる:

> 複素平面内のある領域 D で定義された関数 $f(z)$ が正則 (holomorphic) である必要十分条件は, その実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ が微分可能で, かつ Cauchy-Riemann の関係式 (10.13), (10.14) が D 内で成立することである.

例:　e^z は全平面で正則である.

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$ より $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ である. この時, u と v は微分可能である. また, $\partial_x u = e^x \cos y$, $\partial_y v = e^x \cos y$, $\partial_y u = -e^x \sin y$, $\partial_x v = e^x \sin y$ から Cauchy-Riemann の関係式を満たす. よって, e^z は任意の z について正則である. つまり, 全平面で正則である.

10.3　Cauchy の積分定理

Cauchy-Riemann の関係式 (10.13), (10.14) と Green の定理を組み合わせることにより, 複素関数論において最も重要な定理が以下のように与えられる（証明は後述）:

> 複素変数 $z = x + iy$ の複素関数を $f(z)$ とする. このとき, 積分領域 D とその境界 C において, $f(z)$ が正則であれば, 次式が成立する:
>
> $$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{10.15}$$

つまり, 被積分関数 $f(z)$ が C および D 内で正則ならば, $f(z)$ の具体的な関数形によらず, さらに積分経路にも依存せず, 必ずゼロとなる. 複素解析における面白い結果のほとんどは, この定理が起点となって導かれる.

証明は以下の通りである. 複素変数 $z = x + iy$ の複素関数を $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とすると,

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_C (u+iv)\,(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\oint_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \tag{10.16}$$

線積分を面積分に直す Green の定理

$$\oint_C F\mathrm{d}x = -\int_D \partial_y F \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.17}$$

$$\oint_C F\mathrm{d}y = \int_D \partial_x F \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.18}$$

を使うと,[*4] 式 (10.16) の第一および第二項は

$$\oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) = -\int_D (\partial_y u + \partial_x v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.19}$$

$$\oint_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \int_D (\partial_x u - \partial_y v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.20}$$

この時, $f(z)$ が C 上 および D 内で正則ならば, Cauchy-Riemann の関係式 (10.13), (10.14) が成立するの, (10.19), (10.21) は共にゼロとなる.

例えば, 例 1 で見たように z は全平面で正則なので, その周回積分は必ずゼロとなる.

一方, $1/z$ は $z = 0$ を除き正則である. この様に正則でない点が含まれている場合, 積分範囲に注意する必要がある. 例えば, 積分路 C が, $|z| = r(> 0)$ すなわち原点を中心とする半径 r の円周であれば, 正則でない点 $z = 0$ が含まれるのでゼロになるとは限らない. 一方, 積分路 C が $|z - 1| = 0.1$ すなわち点 (1,0) を中心とする半径 0.1 の円周であれば, 正則でない点 $z = 0$ を含まないので（つまり $1/z$ はこの積分範囲で正則なので）ゼロとなる.

上記の結果を, 極形式をつかって確かめてみる.

例: 1　反時計回りの積分路 C を $|z| = r(> 0)$ とし, 以下の積分を考える：

$$\oint_C z\,\mathrm{d}z. \tag{10.21}$$

このとき, 極形式 $z = re^{i\theta}$ を導入すると, 積分範囲は $0 \leq \theta \quad \leq 2\pi$ になり, また $\mathrm{d}z = ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ なので,

$$\oint_C z\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} re^{i\theta} ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = ir^2 \int_0^{2\pi} e^{i2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0. \tag{10.22}$$

予想通り上式はゼロである. ここでのポイントは, $e^{in\theta}$ (n は整数) なる形の項が被積分関数に含まれている点である. このため, 一周積分をすると必ずゼロとなる. 言い換えると, この $e^{in\theta}$ なる形の項が消えた場合, ゼロとはならない.

[*4] 2 次元平面内の Stokes の定理を用いてもよい. 2 次元平面内の Stokes の定理は, $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$ として

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \oint u\mathrm{d}x + u\mathrm{d}x \\ &= \int_D (\nabla\times\boldsymbol{v})_z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}x \\ &= \int_D (\partial_x v - \partial_y u)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

である.

例 2:　次に, 必ずしもゼロとはならないと予想される以下の積分を考える:

$$\oint_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z. \tag{10.23}$$

ここで 積分路 C は同じく反時計回りで $|z| = r(> 0)$ である.

同じく極形式を導入すると,

$$\oint_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^{-1}e^{-i\theta}ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i, \tag{10.24}$$

つまり, 積分はゼロとはならない. 式変形の途中で $e^{in\theta}$ なる形の項が消えたのがポイントである.

一般に, 以下の事実が知られている. $C : |z| = r(> 0)$ とすると

(i) $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ の場合

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0. \tag{10.25}$$

(ii) $n = -1$ の場合

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 2\pi i. \tag{10.26}$$

(iii) $n = -2, -3, -4, \cdots$ の場合

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0. \tag{10.27}$$

つまり, $n = -1$ の場合を除き全てゼロになる. 証明の方針は以下の通りである.

まず, (i) の場合, z^n はこの積分範囲で正則なので, Cauchy の積分定理よりゼロとなる.

(ii) の場合は既に式 (10.24) で見た.

(iii) の場合, z^n は $1/z^2$ の様に $z = 0$ で正則ではないので, Cauchy の積分定理は使えない. しかしながら, $z^n\,\mathrm{d}z = ir^{1+n}e^{i(1+n)\theta}\,\mathrm{d}\theta$ となり, $e^{in\theta}$ となる形の項が必ず残るので, θ に関する一周積分で必ずゼロとなる.

注意:　(i) と (iii) は同じゼロでも意味が違う点に注意しよう. (i) は関数の正則性からゼロであり, (iii) は関数の形からの帰結である. つまり, 正則であればゼロであるが, ゼロであったとしても正則とは限らない. 言い換えれば, **Cauchy の積分定理の逆が成り立つわけでない.**

10.4　級数展開の復習

ここで, 以下の節で必要となる級数展開の復習を行う.

普通の関数（無限回微分可能でかつ収束してくれる関数）は, 級数展開できる. 例えば, 指数関数や三角関数は以下のように級数展開される：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{10.28}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \tag{10.29}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \tag{10.30}$$

各項の係数はどのようにして決めれば良いのだろうか. それを以下考える. まず, 級数展開可能な関数 $f(x)$ を考える：

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{10.31}$$

最初の係数 a_0 の求め方は簡単である. $x = 0$ とすれば良い：

$$a_0 = f(0) \tag{10.32}$$

次に, a_1 であるが, これを求めるために, まず関数を微分するのが級数展開一般に使われるテクニックである：

$$f(x)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \tag{10.33}$$

それから, $x = 0$ とすれば良い：

$$a_1 = f(0)' \tag{10.34}$$

3 次以降の高次項の係数も同様にして求められる. 結局, 級数展開 (10.31) は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots \tag{10.35}$$

例:　指数関数 $f(x) = e^x$ を三次の項まで級数展開する. （解答例）

$$a_0 = f(0) = 1 \tag{10.36}$$

$$a_1 = f'(0) = 1 \tag{10.37}$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}f''(0) = \frac{1}{2!} \tag{10.38}$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}f'''(0) = \frac{1}{3!} \tag{10.39}$$

より, 式 (10.28) の三次までの項が確かに得られる.

式 (10.31) の右辺で, x を $x-p$ に置き換える：

$$f(x)=a_0+a_1(x-p)+a_2(x-p)^2+a_3(x-p)^3+\cdots \tag{10.40}$$

式 (10.31) では $x=0$ として係数 a_i を求め, 式 (10.35) を得た．これに対し, 式 (10.40) では $x=p$ とすることにより係数が求まる：

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2!}f''(p)(x-p)^2+\frac{1}{3!}f'''(p)(x-p)^3+\cdots \tag{10.41}$$

式 (10.41) は $f(x)$ を $x=p$ の周りで展開した, と言われ Taylor 展開という名前がついている．この時, 式 (10.35) は $x=0$ の周りで展開した, といわれ Maclaurin 展開という名前がついている．つまり Tayler 展開で $p=0$ とした特殊な場合が Maclaurin 展開である．

10.5　留数

例として, 以下のような複素関数 $f(z)$ の級数展開を考える：

$$f(z)=a_{-2}z^{-2}+a_{-1}z^{-1}+a_0+a_1z^1+a_2z^2. \tag{10.42}$$

これを反時計回りの積分経路 $C:|z|=1$ で積分する：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z \tag{10.43}$$

式 (10.25), (10.26) および (10.27) から, 周回積分でゼロにならないのは, $1/z$ に関する項だけなので,

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i a_{-1} \tag{10.44}$$

という重要な関係式が得られる．

この a_{-1} の様に, 積分で残る非積分関数の級数展開の係数を **留数**と呼ぶ．上記の結果は, 複素関数の留数さえ求まれば, それに $2\pi i$ を掛けるだけで積分値が求まることを示す．この簡明な事実が, 複素積分が自然科学分野で広く使われている理由の一つである．そこで以下の節では, 留数の求め方に議論の中心をおく．

10.6　Laurent 展開に基づく留数の求め方

通常の関数と同様に複素関数も級数展開できる．しかしながら, 前節で見たように, 積分で残るのは $1/z$ の項だけである．従って, $-n$ 次の項すなわち正則ではない点（これを特

異点と呼ぶ）も含めて級数展開した方が便利である．この級数展開を Laurent 級数展開と呼ぶ：

$$f(z) = \cdots + a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \cdots . \tag{10.45}$$

平たく言うと, おなじみの Maclaurin 級数展開 $a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ に特異点の項を含めたのが Laurent 級数展開である．このとき, 係数 a_{-1} が留数となる．

式 (10.45) の Laurent 展開は $z = 0$ の周りで展開したものであるが, 一般には $z = s$ の周りで展開した方が応用が利く．この拡張は, Maclaurin 展開から Taylor 展開への移行と同様に, z を $z - s$ に置き換えれば良い：

$$f(z) = \cdots + a_{-2}(z-s)^{-2} + a_{-1}(z-s)^{-1} + a_0 + a_1(z-s)^1 + a_2(z-s)^2 + \cdots . \tag{10.46}$$

ここで, あらためて留数の正式な定義を書いておく：

$f(z)$ が特異点 $z = s$ で Laurent 展開

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-s)^n \tag{10.47}$$

可能なとき, $1/(z-s)$ の係数 a_{-1} を $z = s$ における留数と呼ぶ．数学記号では,

$$a_{-1} = \mathrm{Res}[f, s] \tag{10.48}$$

などと書く．Res は residue（留数）の略である．本講義では, 誤解のないとき, Res, とだけ記す．従って, 式 (10.44) は

$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\, Res} \tag{10.49}$$

となる．

*5

では, 留数 a_{-1} を求めてみよう．例として

$$f(z) = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z^1 \tag{10.50}$$

を考える．最初の項が (10.50) のように z^{-1} ではじまるものを 1 位の極を持つという．正則でない点は $z = 0$ なので, これが特異点である．この係数, すなわち留数 a_{-1} を抜き取

*5　上記の特異点はいわゆる孤立特異点と呼ばれるものを指す．
　式 (10.48) 以外にも様々な表現がある．例えば, dz を書かないとか．

るにはどうすれば良いのだろうか．実数の場合と同様に, $z=0$ を代入しても, 発散してしまう．また, 微分して $z=0$ を代入しても同様である．そこで, z を掛けるのが解析のポイントである：

$$zf(z) = a_{-1} + a_0 z + a_1 z^2. \tag{10.51}$$

次に z を特異点 0 に近づければ, 留数 a_{-1} が求まる：

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = a_{-1} = Res. \tag{10.52}$$

1 位の極を持つ場合, z を一回掛けているのがポイントである．

　次に,

$$f(z) = a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z^1 \tag{10.53}$$

を考える．(10.53) は z^{-2} ではじまっているので, 2 位の極を持つという．上記と同様に z を掛けて特異点 0 に z を近づけると, $a_{-2}z^{-1}$ の項が発散する．では, z^2 を掛けると

$$z^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}z + a_0 z^2 + a_1 z^3 \tag{10.54}$$

となり, 特異点 0 に z を近づけると, 肝心の留数項 $a_{-1}z$ が消える．そこで, 実数の場と同様に, これを微分するのがポイントである：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^2 f(z)] = a_{-1} + 2a_0 z + 3a_1 z^2 \tag{10.55}$$

そして, あらためて z を特異点 0 に近づければ留数 a_{-1} が求まる：

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^2 f(z)] = a_{-1} = Res \tag{10.56}$$

2 位の極を持つ場合, z を二回掛けている点に注意しよう．

　繰り返すが, 最初の項が (10.50) のように z^{-1} ではじまるものを 1 位の極を持つという．同様に, (10.53) は z^{-2} ではじまっているので, 2 位の極を持つ場合である．従って, n 位の極を持つ複素関数の留数は

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[z^n f(z)] = Res \tag{10.57}$$

で与えられる．特異点が $z=0$ ではなく $z=s$ の場合

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to s} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-s)^n f(z)] = Res \tag{10.58}$$

である．

注意:　複素関数の具体的な形が複雑で, 極の位数が不明な時などは, 上記の公式 (10.57), (10.58) ではなく, 地道に Laurent 級数展開して留数 Res を求めた方が確実であることが多い（経験則）．

例:　$C : |z| = 1$ において

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^2} \mathrm{d}z \tag{10.59}$$

を求める.[*6]

$\cos z/z^2$ を特異点 $z = 0$ を中心に Laurent 級数展開すると

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z} - \frac{1}{2} + \cdots \tag{10.60}$$

から, 留数 a_{-1} はゼロである. 従って積分値もゼロとなる.

$\cos z/z^2$ の特異点 $z = 0$ が 2 位の極であることが分かれば, 公式 (10.57) から

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^2 \frac{\cos z}{z^2}] = \lim_{z\to 0}(-\sin z) = 0 \tag{10.61}$$

より留数がゼロなので, 積分値もゼロである.

10.7　留数定理

前節では, 留数は一つだけ存在する場合だけを考えた. では, 複数ある場合はどうすれば良いのだろうか. これについては, 以下の留数定理が知られている.

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C の内部に, 特異点 $s_1, \cdots, s_N$ を持つ時, その周回積分は, 式 (10.49) を拡張して

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}[f, s_j] \tag{10.62}$$

となる.

つまり, 留数を全て求め, それを足し合わせ, 最後に $2\pi i$ を掛ければ良い.

例:　$C : |z| = 5$ において

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 3z + 2} \mathrm{d}z \tag{10.63}$$

を求める.

[*6] 繰り返すが, まず特異点が積分範囲にあることを確認し, 次に留数 Res を求める. そして式 (10.49) から, 留数 Res に $2\pi i$ を掛ければ OK である.

$z^2+3z+2=(z+1)(z+2)$ から特異点は, $z=-1$, $z=-2$ で共に 1 位の極を持つ. これらの特異点は積分範囲に含まれている. 留数 Res は, 公式 (10.58) から, それぞれ $\lim_{z\to-1}(z+1)/\{(z+1)(z+2)\}=1$ および $\lim_{z\to-2}(z+2)/\{(z+1)(z+2)\}=-1$ である. したがって, 留数定理から, 積分値は $2\pi i(1-1)=0$.

例 2:　$C:|z|=1.5$ において

$$\oint_C \frac{1}{z^2+3z+2}\mathrm{d}z \tag{10.64}$$

を求める.

点 $z=-1$ は積分範囲に含まれるが, $z=-2$ は含まれない. 従って, 考える特異点は $z=-1$ のみである. つまり, 積分値は $2\pi i$ である.

10.8　複素関数積分に基づく実数関数積分

今まで見てきたように, 複素関数の積分は非常に簡明である. そこで, 計算が難しい実数関数の積分を, 複素平面で考えて解くことが多い. 具体例を以下に見ていこう.

例として, 実数関数 x^2+1 の実数積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \tag{10.65}$$

を考える. 変数 x は複素数ではなく実数であるので間違えないように. この実数積分を実行するために, 複素関数 z^2+1 の複素積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z \tag{10.66}$$

を考える. 特異点 $z=i,-i$ を複素平面に落とすと

積分経路は図 10.2 のような半円の周を考え, $z=i$ の特異点だけを含むようにする. 積分方向は反時計周りである (補足説明その 2 参照). この経路を分割して $C=C_1+C_2$ とするのが, 解析のポイントである：

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z. \tag{10.67}$$

ここで, 経路 C_1 上の積分は実数軸上の積分なので, 右辺第一項は実数積分に置き換えられて

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int_{C_2} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z. \tag{10.68}$$

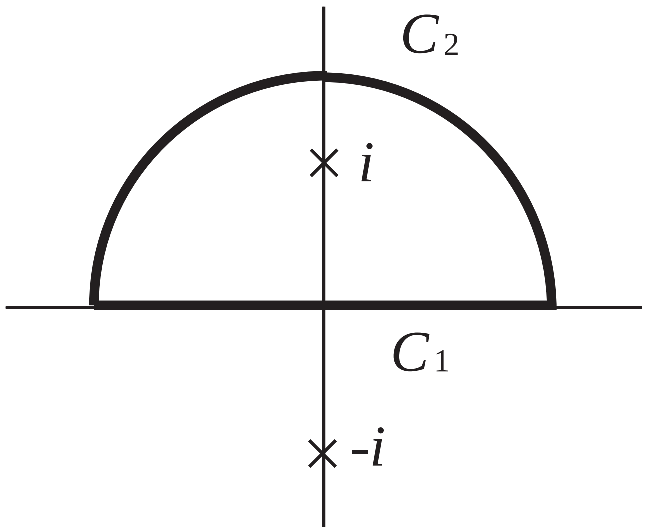

図 10.2　積分経路 C

つまり, $R \to \infty$ とすれば, 右辺第一項が求めたい積分 (10.65) に対応する．言い換えれば,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \oint_C \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z - \int_{C_2} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z \tag{10.69}$$

における右辺を求めれば良い．ここで, 第二項は $R \to \infty$ でゼロに収束する（注：分母の次数が分子の次数より 2 以上大きければ OK である．下記の補足参照その 1 参照．）．従って, 結局,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \oint_C \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z \tag{10.70}$$

ここで, 右辺は, 留数が $1/(2i)$ なので, π である．従って,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \pi \tag{10.71}$$

となる．式 (10.70) の事実に慣れてくれば, (10.65) 型の実数積分は暗算的に求められる．

補足説明その 1：　$z = Re^{i\theta}$ を導入して,

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}\,\mathrm{d}\theta \tag{10.72}$$

これは 被積分関数の R 依存性に注目すると, 分母は R^2, 分子は R に比例するので, $R \to \infty$ のとき, 被積分関数はゼロに収束する．一般に, 分母の次数が分子の次数より 2 以上大きければ同様の結果となる．

補足説明その２: 上の特異点を囲う積分を考えてきたが, 下の特異点を囲う積分を採用した場合に結果がどのようになるのか, という疑問が自然に湧く. 以下で見るように, 下の特異点を囲う積分にしても結果は変わらない. 下の特異点 $-i$ を考えた場合, Res は $-$Res となる. しかしながら, 下の特異点を考えると, $-R(=-\infty)$ から $R(=\infty)$ へといたる積分経路は, 今まで考えてきた反時計回りではなく時計回りなので, マイナスがつくから答えは変わらない.