

地球惑星科学基礎III 演習(5)

2013 年 4 月 29 日掲載

1 Fourier 級数の問題

i) $k = 1, 2, 3, \dots$ のとき, $\int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0$ となることを証明しなさい.

ii) 以下の関係式を証明しなさい. ただし, $m, n \in \mathbb{N}$ とする.

a) $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = L\delta_{m,n}$. ここで, $\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタである.

b) $\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$.

iii) $-L < x < L$ で与えられ, その区間の外側では周期 $2L$ をもつ実関数 $f(x)$ に関する Fourier 級数

$$f(x) = A + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \quad (1)$$

において, $m \in \mathbb{N}$ に関して $a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx$, $b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$, $A = \frac{a_0}{2}$ となることを証明しなさい.

iv) 以下の関数を図示し, その関数の Fourier 係数を求めなさい.

a) $f(x) = \begin{cases} 3, & (0 < x < 5) \\ -3, & (-5 < x < 0) \end{cases}$
周期は 10 とする.

b) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0, & (\pi < x < 2\pi) \end{cases}$
周期は 2π とする.

2 種々雑多の問題

- i) 偶関数と偶関数の積は偶関数であることを証明しなさい.
- ii) 奇関数と奇関数の積は偶関数であることを証明しなさい.
- iii) 偶関数と奇関数の積は奇関数であることを証明しなさい.
- iv) $f_{\text{even}}(x)$, $f_{\text{odd}}(x)$ をそれぞれ偶関数, 奇関数とする. このとき, 以下の式を証明しなさい. ここで L は正の実数とする.

a)
$$\int_{-L}^L f_{\text{even}}(x) \, dx = 2 \int_0^L f_{\text{even}}(x) \, dx$$

b)
$$\int_{-L}^L f_{\text{odd}}(x) \, dx = 0$$