

# 地球惑星科学基礎III 演習(4)

2013年4月19日 配布

## 1 和の規約の問題

i) 和の規約を用いて, 以下を書き下しなさい.

a)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

b)  $df(x_1, x_2, x_3)$ . ここで  $d$  は全微分である.

ii) Kronecker のデルタの定義と和の規約を用いて,  $\delta_{ii}$  の値を計算しなさい.

iii)  $\delta_{ij}A_j$  を求めなさい.

iv)  $\delta_{ij}\delta_{jk}$  を求めなさい.

v)  $(\partial_j x_i)(\partial_k x_j) = \delta_{ik}$  を証明しなさい.

vi) テキストの (7.14) を確かめなさい.

vii) ベクトル解析に現れる公式は,  $\delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  や 和の規約を使うと容易に証明できる. 次  
にあげる公式を,  $\delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  や和の規約を使って証明しなさい.

a) ベクトル積に関する公式  $B \times A = -A \times B$ ,

b) ベクトル三重積に関する公式

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B),$$

viii)  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$  を確かめなさい.

ix) 次の関係を証明しなさい.

- $\varepsilon_{ijk}A_jA_k = 0$

- $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$

x) 流体力学の Lagrange 微分に現れる移流項  $v \cdot \nabla v$  は,

$$v \cdot \nabla v = \nabla \left( \frac{1}{2} |v|^2 \right) + \omega \times v \quad (1)$$

と書けることを証明しなさい. ここで  $v$  は流体の速度場で,  $\omega \equiv \nabla \times v$  は渦度と呼ばれる物理量である (上の関係式は Bernoulli の定理を証明するときに用いられる.)

- xi)  $\nabla \times (S\mathbf{A}) = (\nabla S) \times \mathbf{A} + S(\nabla \times \mathbf{A})$  を和の規約を用いて証明しなさい.
- xii)  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$  を和の規約を使って証明しなさい.
- xiii)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  を和の規約を使って証明しなさい.
- xiv) 物理数学で現れる Laplace 演算子  $\Delta \equiv \nabla^2$  はスカラー関数に作用する演算子である. しかしながら, デカルト座標系において  $\nabla^2 v_i$  を成分に持つベクトルをしばしば  $\nabla^2 \mathbf{v}$  と書くことがある. 即ち,

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^2 v_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \nabla^2 v_i \quad (2)$$

である. 上の関係はデカルト座標系に対してのみ成り立つ. 一般の直交直線座標系 (極座標や円筒座標) では座標系の単位ベクトルが位置に依存するので (2) のように書くことはできない. その場合には,

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (3)$$

の公式により,  $\nabla^2 \mathbf{v}$  を書き直しておく必要がある. (3) を和の規約を用いて証明しなさい.