

地球惑星科学基礎III 演習(3)

2013年4月12日掲載

講義では扱えなかった話題

1 定数係数の2階線形連立常微分方程式

図1のようにバネ定数 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ を持った3つの線形バネにつながれた2つの質点の運動方程式は,

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 = -\kappa_1 x_1 + \kappa_3 (x_2 - x_1), \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 = -\kappa_2 x_2 - \kappa_3 (x_2 - x_1), \end{cases} \quad (1)$$

の形の定数係数2階線形連立常微分方程式で書ける. このような方程式を解いてみよう.

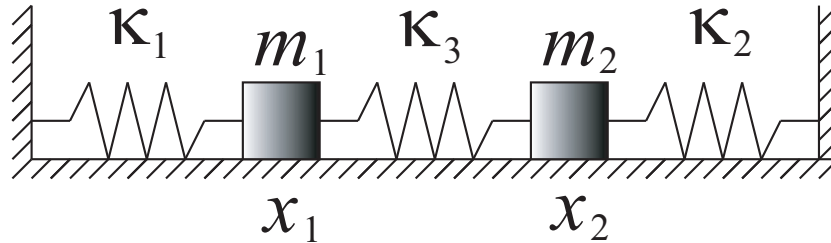


図1: 線形バネにつながれた質点. x_1, x_2 は平衡の位置からの変位とする.

簡単のために 質点の質量とバネ定数は全て等しいとする. 即ち, $m \equiv m_1 = m_2, \kappa \equiv \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$.

解法1: 変数変換を行うことにより, 独立な2つの微分方程式に書き直す. $X \equiv x_1 + x_2$, $Y = x_1 - x_2$ として, X, Y に関する方程式に書き直す. X, Y に関する方程式はそれぞれ X, Y のみを含む定数係数2階線形常微分方程式になるので, それを“推定法”を使って解く. (X は2つ質点の重心の位置を表し, Y は相対位置を表す.)

解法2: (1) は今の状況設定のもとでは, 次のように行列を用いて書き下すことが出来る:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $\omega^2 \equiv \frac{\kappa}{m}$ である。これを“推定法”と行列の知識を使って解いてみる。

先ず、この方程式の解を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

と推定し、(2) に代入する。ここで c_1, c_2 は定数とする。このとき、(2) は

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる。これは、 λ^2 を固有値とする行列

$$M = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

の固有値問題になっている。(5) の固有値は、 $\lambda^2 = -3\omega^2, -\omega^2$ と求められる。さらに、固有値 $\lambda^2 = -3\omega^2$ に属する固有ベクトルは、 $c_1 = -c_2$ 、固有値 $\lambda^2 = -\omega^2$ に属する固有ベクトルは、 $c_1 = c_2$ である。そこで、微分方程式の解はこれら求められたものを重ね合わせて、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{3}\omega t} + D_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega t} \quad (6)$$

となる。ここで、 C_1, C_2, D_1, D_2 は任意定数である。

1.1 演習問題

- i) $m_1 = m_2, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$ のとき、(1) を上で説明した解法 1 の方法で説き、解が (6) であることを確かめなさい。
- ii) $m_1 = m_2, \kappa_1 = \kappa_2$ のとき、(1) を上で説明した解法 2 の方法で説きなさい。

2 Sturm–Liouville 型の微分方程式

2.1 はじめに

地球惑星科学で登場する微分方程式は、次のような形式のことが多い：

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right\} y(x) = \lambda r(x) y(x). \quad (7)$$

ここで、 λ は未定の定数で、 $p(x), q(x), r(x)$ は既知の x の関数である。方程式 (7) は Sturm–Liouville 型の微分方程式と呼ばれ、 p, q, r を適当に選ぶと著名な種々の微分方程式が得られる。

例 1 : 三角関数や双曲線関数が解となる

$$\frac{d^2}{dx^2}y = \lambda y \quad (8)$$

は (7) において, $p = 1, q = 0, r = 1$ の場合である. $\lambda < 0$ のとき三角関数が, $\lambda > 0$ のとき双曲線関数が解となる.

例 2 : Hermite の微分方程式,

$$\frac{d^2}{dx^2}y - 2x \frac{d}{dx}y + 2ny = 0, \quad (9)$$

は (7) において $p = \exp(-x^2), q = 0, r = \exp(-x^2), \lambda = -2n$ の場合である. ここで, n は 0 または正の整数である. この方程式の解は多項式で与えられ, Hermite 多項式と呼ばれ, 通常 $H_n(x)$ と表される. 地球の大気・海洋中には様々な種類の波動が存在し, 赤道付近に捕捉された波動 (赤道波と呼ばれる) の従う方程式は (9) の形に変形することができる. (量子力学を習うと, 調和振動子の Schrödinger 方程式を解く際にこの特殊関数が登場する.)

例 3 : Bessel の微分方程式,

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}y + x \frac{d}{dx}y + (x^2 - n^2)y = 0, \quad (10)$$

は (7) で $p = x, q = x, r = 1/x, \lambda = n^2$ の場合である. ここで, n は 0 または正の定数である. この方程式の解は Bessel 関数と呼ばれ, $J_n(x)$ と表される. Bessel 関数は円筒関数もしくは円柱関数と呼ばれ, 円柱状の境界値問題ではこの関数が登場する. 大気・海洋中には円形の渦が卓越するが, このような渦の安定性を吟味するときに Bessel の微分方程式や Bessel 関数が登場する.

例 4 : Laguerre の微分方程式,

$$x \frac{d^2}{dx^2}y + (1 - x) \frac{d}{dx}y + \alpha y = 0, \quad (11)$$

は (7) において $p = x \exp(-x), q = 0, r = \exp(-x), \lambda = -\alpha$ の場合である. この方程式の解は Laguerre の多項式と呼ばれ, 通常 $L_n(x)$ で表される.

例 5 : Laguerre の多項式を k 階微分した多項式は Laguerre の陪多項式と呼ばれ, $L_n^k(x)$ で表される. この多項式は次の微分方程式の解となる:

$$x \frac{d^2}{dx^2}y + (k + 1 - x) \frac{d}{dx}y + (\alpha - k)y = 0. \quad (12)$$

この微分方程式は Laguerre の陪微分方程式といい, これは (7) で $p = x^{k+1} \exp(-x), q = 0, r = x^k \exp(-x), \lambda = k - \alpha$ 場合である.

例 6 : Legendre の微分方程式,

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2}y - 2x \frac{d}{dx}y + l(l + 1)y = 0, \quad (13)$$

は (7) で $p = 1 - x^2$, $q = 0$, $r = -1$, $\lambda = l(l+1)$ の場合である. ここで, n は正の整数である. この方程式の解は多項式で与えられ, Legendre の多項式と呼ばれ, 通常 $P_l(x)$ と書かれる.

例 7 : Legendre の多項式 $P_l(x)$ を, m 階微分したものに $(1 - x^2)^{m/2}$ を乗じたものは Legendre の陪多項式と呼ばれ, $P_l^{(m)} \equiv (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ と書かれる. この多項式は次の微分方程式の解となる:

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} y - 2x \frac{d}{dx} y + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right\} y = 0. \quad (14)$$

この微分方程式は Legendre の陪微分方程式と呼ばれ, これは (7) において $p = (1 - x^2)$, $q = -m^2/(1 - x^2)$, $r = 1$, $\lambda = -l(l+1)$ の場合である. ここで, m は 0 または正の整数 (ただし, $l \geq m$) である. 地球大気の運動は, 球面上に張り付いた流体 (気体や液体の総称) の運動と考えることができる. このような運動を考察する際に, Legendre の陪多項式を用いると便利である. また, 気象の数値実験 (天気予報) を精度よく行う際にも, Legendre の陪多項式が必要となる.

2.2 演習問題

- i) (9)~(14) が Sturm–Liouville 型の微分方程式であることを確かめなさい. (各微分方程式の名前も調べなさい.)
- ii) Sturm–Liouville 型の微分方程式は線形微分方程式であることを確かめなさい.

補足: (7) は

$$p \frac{d^2}{dx^2} y + p' \frac{d}{dx} y + (q - \lambda r) y = 0, \quad (15)$$

と書き直せる. ここで, $p' = \frac{dp}{dx}$ である. Sturm–Liouville 型の微分方程式は定数係数ではないが 2 階の線形常微分方程式である.

3 微分方程式の級数解法

3.1 はじめに

前の節で挙げた例 2~7 の多項式や関数は特殊関数と呼ばれる. それらの従う微分方程式をといて解を得ようとするとき, $y = e^{\alpha x}$ と置く推定法では解くことができない. このような方程式を解くには, 級数展開法と呼ばれるものを使う.

この解法のエッセンスは, 解を

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_{-m}}{x^m} + \frac{a_{-m+1}}{x^{m-1}} + \dots + a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \\ &= \sum_{i=-m}^{\infty} a_i x^i \end{aligned} \quad (16)$$

と級数で表現する．これをもとの微分方程式に代入して係数 a_n を決める．通常は a_n の漸化関係式が得られる．

どの項から展開を始めるか，即ち m の値をいくつにとるか，また (16) の展開が収束するための条件を考慮する必要があるなど，他に説明すべきことはあるが，ここではそのような問題は伏せておいて，解のよく知られた微分方程式を級数展開法で解いて，級数展開法に触れて見よう．

3.2 演習問題

- i) 指数関数 $y = e^{\lambda x}$ を $x = 0$ を中心に Taylor 展開しなさい．
- ii) 定数係数を持った 1 階の線形微分方程式

$$\frac{d}{dx}y = \lambda y \quad (17)$$

を級数展開法で解きなさい．ここで， λ は定数であり，解は

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \end{aligned} \quad (18)$$

と展開できると仮定する．(18) を (17) に代入することにより係数 a_i の従う漸化関係式を導きなさい．

- iii) 前設問で導いた級数が指数関数であることを確かめなさい．