

地球惑星科学基礎 III 演習 (10)

2013 年 6 月 25 日掲載

1 波動方程式の問題

$0 \leq x \leq L$ の領域内で, 1 次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (c > 0) \quad (1)$$

を, 境界条件

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad (3)$$

のもとで解きなさい. ここでは非自明な解 (u が恒等的にゼロでない解) でなおかつ $t \rightarrow \infty$ で u が発散しない解にのみ注目する.

- 演習の時間には, 問題を小分けにして, 何名かで模範解答を示してください.

2 線形移流方程式の問題

流体力学では, Lagrange 微分と呼ばれる時間微分が定義できる. 3 次元空間内のある場の量 $A(\mathbf{r}, t)$ に対して, A の Lagrange 微分は

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

と書ける. ここで, u, v, w は流速 $\mathbf{v}$ の x, y, z 成分である. (4) の第一の表現の右辺第 2 項もしくは, 第二の表現の第 2 ~ 4 項は移流項と呼ばれる. 物理量 A はスカラー量でもベクトル量でもよく, もし A が速度 $\mathbf{v}$ 自身である場合や, A が $\mathbf{v}$ に依存する場合には, 移流

項は速度に関する 2 次以上の項となり非線型項になる。次のような方程式は移流方程式と呼ばれている¹

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla A = 0. \quad (6)$$

i) 空間 1 次元で, A は速度とは無関係な線形移流方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

を考える。波動方程式の d'Alembert 解を導出したのと同様な手法により, この方程式の解 A の性質について議論しなさい。

¹移流と拡散を含む方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla A = \nu \nabla^2 A. \quad (5)$$

は移流拡散方程式と呼ばれている。