地球惑星科学基礎 III 演習 (9)

2011 年 1 月 21 日 配布

1 和の規約の問題

i) 和の規約を用いて, 以下を書き下しなさい.

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

b) $df(x_1, x_2, x_3)$. ここで d は全微分である.

ii) Kronecker のデルタの定義と和の規約を用いて, δ_{ii} の値を計算しなさい.

iii) $\delta_{ij}A_j$ を求めなさい.

iv) $\delta_{ij}\delta_{jk}$ を求めなさい.

v) $(\partial_j x_i)(\partial_k x_j) = \delta_{ik}$ を証明しなさい.

vi) テキストの (7.17) を確かめなさい.

vii) ベクトル解析に現れる公式は, δ_{ij} , ε_{ijk} や 和の規約を使うと容易に証明できる. 次
にあげる公式を, δ_{ij} , ε_{ijk} や和の規約を使って証明しなさい.

a) ベクトル積に関する公式 $B \times A = -A \times B$,

b) ベクトル三重積に関する公式

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B),$$

viii) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ を確かめなさい.

ix) 次の関係を証明しなさい.

- $\varepsilon_{ijk}A_jA_k = 0$

- $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$

x) 流体力学の Lagrange 微分に現れる移流項 $v \cdot \nabla v$ は,

$$v \cdot \nabla v = \nabla \left(\frac{1}{2}|v|^2 \right) + \omega \times v \quad (1)$$

と書けることを証明しなさい. ここで v は流体の速度場で, $\omega \equiv \nabla \times v$ は渦度と呼ばれる物理量である (上の関係式は Bernoulli の定理を証明するときに用いられる.)

- xi) $\nabla \times (S\mathbf{A}) = (\nabla S) \times \mathbf{A} + S(\nabla \times \mathbf{A})$ を和の規約を用いて証明しなさい.
- xii) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ を和の規約を使って証明しなさい.
- xiii) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ を和の規約を使って証明しなさい.
- xiv) 物理数学で現れる Laplace 演算子 $\Delta \equiv \nabla^2$ はスカラー関数に作用する演算子である. しかしながら, デカルト座標系において $\nabla^2 v_i$ を成分に持つベクトルをしばしば $\nabla^2 \mathbf{v}$ と書くことがある. 即ち,

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^2 v_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \nabla^2 v_i \quad (2)$$

である. 上の関係はデカルト座標系に対してのみ成り立つ. 一般の直交直線座標系 (極座標や円筒座標) では座標系の単位ベクトルが位置に依存するので (2) のように書くことはできない. その場合には,

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (3)$$

の公式により, $\nabla^2 \mathbf{v}$ を書き直しておく必要がある. (3) を和の規約を用いて証明しなさい.