地球惑星科学基礎III 演習 (9)

2010 年 1 月 15 日　配布

1　和の規約の問題

i) 和の規約を用いて，以下を書き下しなさい.

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

b) $\mathrm{d}f(x_1, x_2, x_3)$. ここで d は全微分である.

ii) Kronecker のデルタの定義と和の規約を用いて, δ_{ii} の値を計算しなさい.

iii) $\delta_{ij} A_j$ を求めなさい.

iv) $\delta_{ij}\delta_{jk}$ を求めなさい.

v) $(\partial_j x_i)(\partial_k x_j) = \delta_{ik}$ を証明しなさい.

vi) テキストの (7.17) を確かめなさい.

vii) ベクトル解析に現れる公式は, δ_{ij}, ε_{ijk} や 和の規約を使うと容易に証明できる. 次にあげる公式を, δ_{ij}, ε_{ijk} や和の規約を使って証明しなさい.

a) ベクトル積に関する公式 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$,

b) ベクトル三重積に関する公式

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \;=\; \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}),$$

viii) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ を確かめなさい.

ix) 次の関係を証明しなさい.

- $\varepsilon_{ijk} A_j A_k = 0$
- $\varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0$

x) 流体力学の Lagrange 微分に現れる移流項 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}$ は,

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{v}|^2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} \tag{1}$$

と書けることを証明しなさい. ここで $\boldsymbol{v}$ は流体の速度場で, $\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ は渦度と呼ばれる物理量である. (上の関係式は Bernoulli の定理を証明するときに用いられる.)

xi) $\boldsymbol{\nabla} \times (S\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla} S) \times \boldsymbol{A} + S\,(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$ を和の規約を用いて証明しなさい.

xii) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0$ を和の規約を使って証明しなさい.

xiii) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0$ を和の規約を使って証明しなさい.

xiv) 物理数学で現れる Laplace 演算子 $\Delta \equiv \nabla^2$ はスカラー関数に作用する演算子である. しかしながら, デカルト座標系において $\nabla^2 v_i$ を成分に持つベクトルをしばしば $\nabla^2 \boldsymbol{v}$ と書くことがある. 即ち,

$$\nabla^2 \boldsymbol{v} = \nabla^2 v_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i \nabla^2 v_i \tag{2}$$

である. 上の関係はデカルト座標系に対してのみ成り立つ. 一般の直交直線座標系（極座標や円筒座標）では座標系の単位ベクトルが位置に依存するので (2) のように書くことはできない. その場合には,

$$\nabla^2 \boldsymbol{v} = \nabla\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) \tag{3}$$

の公式により, $\nabla^2 \boldsymbol{v}$ を書き直しておく必要がある. (3) を和の規約を用いて証明しなさい.