地球惑星科学基礎III 演習 (3)

2009 年 10 月 16 日配布

ちょっと高度な話題

1 Strum–Liouville 型の微分方程式

1.1 はじめに

地球惑星科学で登場する微分方程式は，次のような形式のものが多い：

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)\right\}y(x)=\lambda r(x)y(x). \tag{1}$$

ここで，λ は未定の定数で，$p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ は既知の x の関数である．方程式 (1) は Strum–Liouville 型の微分方程式と呼ばれ，p, q, r を適当に選ぶと著名な種々の微分方程式が得られる．

例１： 三角関数や双曲線関数が解となる

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y=\lambda y \tag{2}$$

は (1) において，$p=1$, $q=0$, $r=1$ の場合である．$\lambda<0$ のとき三角関数が，$\lambda>0$ のとき双曲線関数が解となる．

例２： Hermite の微分方程式,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y-2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y+2ny=0, \tag{3}$$

は (1) において $p=\exp(-x^2)$, $q=0$, $r=\exp(-x^2)$, $\lambda=-2n$ の場合である．ここで，n は 0 または正の整数である．この方程式の解は多項式で与えられ， Hermite 多項式と呼ばれ，通常 $H_n(x)$ と表される．地球の大気・海洋中には様々な種類の波動が存在し，赤道付近に捕捉された波動（赤道波と呼ばれる）の従う方程式は (3) の形に変形することができる．(量子力学を習うと，調和振動子の Schrödinger 方程式を解く際にこの特殊関数が登場する．)

例3： Besselの微分方程式,

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + (x^2 - n^2)y = 0, \tag{4}$$

は(1)で $p = x$, $q = x$, $r = 1/x$, $\lambda = n^2$ の場合である．ここで，n は0または正の定数である．この方程式の解はBessel関数と呼ばれ，$J_n(x)$ と表される．Bessel関数は円筒関数もしくは円柱関数と呼ばれ，円柱状の境界値問題ではこの関数が登場する．大気・海洋中には円形の渦が卓越するが，このような渦の安定性を吟味するときにBesselの微分方程式やBessel関数が登場する．

例4： Laguerreの微分方程式,

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y + (1 - x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + \alpha y = 0, \tag{5}$$

は(1)において $p = x\exp(-x)$, $q = 0$, $r = \exp(-x)$, $\lambda = -\alpha$ の場合である．この方程式の解はLaguerreの多項式と呼ばれ，通常 $L_n(x)$ で表される．

例5： Laguerreの多項式を k 階微分した多項式はLaguerreの陪多項式と呼ばれ，$L_n^k(x)$ で表される．この多項式は次の微分方程式の解となる:

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y + (k + 1 - x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + (\alpha - k)y = 0. \tag{6}$$

この微分方程式はLaguerreの陪微分方程式といい，これは(1)で $p = x^{k+1}\exp(-x)$, $q = 0$, $r = x^k\exp(-x)$, $\lambda = k - \alpha$ 場合である．

例6： Legendreの微分方程式,

$$(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + l(l + 1)y = 0, \tag{7}$$

は(1)で $p = 1 - x^2$, $q = 0$, $r = -1$, $\lambda = l(l + 1)$ の場合である．ここで，n は正の整数である．この方程式の解は多項式で与えられ，Legendreの多項式と呼ばれ，通常 $P_l(x)$ と書かれる．

例7： Legendreの多項式 $P_l(x)$ を，m 階微分したものに $(1 - x^2)^{m/2}$ を乗じたものはLegendreの陪多項式と呼ばれ，$P_l^{(m)} \equiv (1 - x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$ と書かれる．この多項式は次の微分方程式の解となる：

$$(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y - 2(m + 1)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + \{l(l + 1) - m(m + 1)\}\,y = 0. \tag{8}$$

この微分方程式はLegendreの陪微分方程式と呼ばれ，これは(1)において $p = (1 - x^2)^{m+1}$, $q = 0$, $r = -(1 - x^2)^m$, $\lambda = l(l + 1) - m(m + 1)$ の場合である．ここで，m は0または正の整数（ただし，$l > m$）である．地球大気の運動は，球面上に張り付いた流体（気体や液体の総称）の運動と考えることができる．このような運動を考察する際に，Legendreの陪多項式を用いると便利である．また，気象の数値実験（天気予報）を精度よく行う際にも，Legendreの陪多項式が必要となる．

1.2 演習問題

i) (3)〜(8) が Strum–Liouville 型の微分方程式であることを確かめなさい.（各微分方程式の名前も調べなさい.）

ii) Strum–Liouville 型の微分方程式は線形微分方程式であることを確かめなさい.

補足： (1) は

$$p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y + p'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + (q - \lambda r)\,y = 0, \tag{9}$$

と書き直せる．ここで，$p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ である．Strum–Liouville 型の微分方程式は定数係数ではないが 2 階の線形常微分方程式である.

2 微分方程式の級数解法

2.1 はじめに

前の節で挙げた例 2 〜 7 の多項式や関数は特殊関数と呼ばれる．それらの従う微分方程式をといて解を得ようとするとき，$y = e^{\alpha x}$ と置く推定法では解くことができない．このような方程式を解くには，級数展開法と呼ばれるものを使う.

この解法のエッセンスは，解を

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_{-m}}{x^m} + \frac{a_{-m+1}}{x^{m-1}} + \ldots\ldots + a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n + \ldots\ldots \\ &= \sum_{i=-m}^{\infty} a_ix^i \end{aligned} \tag{10}$$

と級数で表現する．これをもとの微分方程式に代入して係数 a_n を決める．通常は a_n の漸化関係式が得られる.

どの項から展開を始めるか，即ち m の値をいくつにとるか，また (10) の展開が収束するための条件を考慮する必要があるなど，他に説明するべきことはあるが，ここではそのような問題は伏せておいて，解のよく知られた微分方程式を級数展開法で解いて，級数展開法に触れて見よう.

2.2 演習問題

i) 指数関数 $y = e^{\lambda x}$ を $x = 0$ を中心に Taylor 展開しなさい.

ii) 定数係数を持った 1 階の線形微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = \lambda y \tag{11}$$

を級数展開法で解きなさい．ここで，λ は定数であり，解は

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \end{aligned} \tag{12}$$

と展開できると仮定する．(12) を (11) に代入することにより係数 a_i の従う漸化関係式を導きなさい．

iii) 前設問で導いた級数が指数関数であることを確かめなさい．