

地球惑星科学基礎 III 演習 (7)

2008 年 12 月 19 日配布

1 Fourier 変換に関する問題

i) 関数 $f(x)$ の Fourier 変換, 逆変換をそれぞれ $\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk$, と定義する.

a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (1)$$

b) $a = 3$ として, $f(x)$ とその Fourier 変換を図示しなさい.

ii) a) 前問の結果を用いて, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka \cos kx}{k} dk$ の値を見積もりなさい.

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$ の値を求めなさい.

iii) a) $f(x)$ が偶関数の時, Fourier 変換の公式は以下のように与えられることを示しなさい.

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx, \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \cos kx dk. \quad (3)$$

ヒント: $\hat{f}(k)$ が (2) で与えられるとき, $\hat{f}(k)$ は偶関数か奇関数か.

b) $f(x) = e^{-m|x|}$, $m > 0$ の Fourier 変換を求めなさい.

c) 前設問の結果を用いて,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + m^2} dk = \frac{\pi}{2m} e^{-mx}, \quad (m > 0, x > 0)$$

を示しなさい.

iv) Fourier 変換に関する以下の性質を証明しなさい. α, β, γ は定数とする.

a) $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}$

b) $\mathcal{F}\{f(x - \alpha)\} = e^{-ik\alpha}\mathcal{F}\{f(x)\}$

c) $\mathcal{F}\{e^{-\alpha x}f(x)\} = \hat{f}(k - i\alpha)$

d) $\mathcal{F}\{f(\gamma x)\} = \frac{1}{|\gamma|}\hat{f}\left(\frac{k}{\gamma}\right), \quad (\gamma \neq 0)$

e) $f(x)$ が微分可能で, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ のとき, $\mathcal{F}\left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}$