地球惑星科学基礎III 演習(4)

2008年10月24日配布

1 Fourier 級数の問題

i) $k = 1, 2, 3, \cdots$ のとき，$\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \cos\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 0$ となることを証明しなさい．

ii) 以下の関係式を証明しなさい．ただし，$m, n \in \mathbb{N}$ とする．

a) $$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ L, & (m = n) \end{cases}$$

b) $$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 0$$

iii) $-L < x < L$ で定義され，その領域の外側では周期 $2L$ をもつ実関数 $f(x)$ に関する Fourier 級数

$$f(x) = A + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \sin\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

において，$m \in \mathbb{N}$ に関して $a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$, $b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$, $A = \frac{a_0}{2}$ となることを証明しなさい．

iv) 以下の関数を図示し，その関数の Fourier 係数を求めなさい．

a) $$f(x) = \begin{cases} 3, & (0 < x < 5) \\ -3, & (-5 < x < 0) \end{cases}$$
周期は 10 とする．

b) $$f(x) = \begin{cases} \sin x, & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0, & (\pi < x < 2\pi) \end{cases}$$
周期は 2π とする．

v) 以下の関数の Fourier 級数表示を求めなさい．[1]

[1] この問題は，Fourier 級数の知識がなくても三角関数の公式を使えばすぐに計算できるものである．ただ，それが Fourier 級数という見方もできるということを示したかった．

a) $\sin^2 x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$ で定義され，周期は π)

b) $\cos^2 x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$ で定義され，周期は π)

c) $\sin^3 x$ ($-\pi < x < \pi$ で定義され，周期は 2π)

d) $\cos^3 x$ ($-\pi < x < \pi$ で定義され，周期は 2π)

2 種々雑多の問題

i) 偶関数と偶関数の積は偶関数であることを証明しなさい.

ii) 奇関数と奇関数の積は偶関数であることを証明しなさい.

iii) 偶関数と奇関数の積は奇関数であることを証明しなさい.

iv) $f_{\mathrm{even}}(x)$, $f_{\mathrm{odd}}(x)$ をそれぞれ偶関数, 奇関数とする. このとき, 以下の式を証明しなさい. ここで L は正の実数とする.

a) $\displaystyle\int_{-L}^{L} f_{\mathrm{even}}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{L} f_{\mathrm{even}}(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-L}^{L} f_{\mathrm{odd}}(x)\,\mathrm{d}x = 0$