

地球惑星科学基礎III 演習(2)

2008年10月10日配布

1 定数係数を持った2階の線形常微分方程式の問題

以下の微分方程式の一般解を求めなさい。

i)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

ii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0$$

iii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 25x = 0$$

iv)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

v)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

vi)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = t^2 + 2e^{3t}$$

vii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 25x = 20 \cos 2t$$

viii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = f_0 \cos \omega t$$

ここで, ω, f_0 は実数の定数であるとする。

2 1階の微分方程式の問題

講義で扱った2階の微分方程式のほかにも物理学の研究・勉強で頻繁に現れる微分方程式として1階の微分方程式がある。1階の微分方程式でも定数係数を持つ場合には、講義で扱ったのと同様の方法(“推定法”)で解くことができる。その他の場合には変数分離法で説ける場合が多い(むしろ1階の微分方程式は変数分離法で解くことが常套手段のようである。)

変数分離法による1階の常微分方程式の解法： 次のような1階の常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

において、 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = F(x)G(y) \quad (2)$$

と x のみの関数 $F(x)$ と y のみの関数 $G(y)$ の積としてかける場合、すなわち

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y) \quad (3)$$

と書ける場合を考える。(3)は次のように変形できる:

$$\frac{dy}{G(y)} = F(x)dx. \quad (4)$$

(4)の両辺を積分する

$$\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x)dx \quad (5)$$

ことにより微分方程式(3)を解くことができる(一般解を得ることが出来る)。(3)は1階の微分方程式なのでその一般解は1個の任意定数を含むことに注意しなさい。¹

i) 次の微分方程式を、以下の2つの方法で解きなさい。

$$\frac{dx}{dt} + \omega x = 0. \quad (6)$$

ここで、 ω は実数の定数であるとする。

a) 定数係数を持った2階の線形常微分方程式と同様に推定法を用いて解きなさい。

b) 変数分離法を用いて解きなさい。

ii) 次の微分方程式を、前設問 i) の解を参考にして、係数変化法を用いて解きなさい。(解は $f(t)$ の積分を含む形で与えられる。 $f(t)$ が陽に与えられていないので、その積分は実行できない。したがってここで得られる解は形式解である。)

$$\frac{dx}{dt} + \omega x = f(t).$$

ここで、 ω は実数の定数、 $f(t)$ は t の既知関数とする。

¹(5)は不定積分なので、積分に伴って任意定数であるところの積分定数が出てくる。左辺の積分で1個、右辺の積分で1個出てくるが、これを一まとめにして一つの任意定数に出来る。

3 発展問題

- i) 次の連立微分方程式は, 大気の下層や海洋の表層の流れを記述する方程式で Ekman 方程式と呼ばれるものである.

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dz^2} - v &= 0, \\ \frac{d^2v}{dz^2} + u &= U_\infty.\end{aligned}$$

ここで, U_∞ は定数である.

- a) 上記の連立微分方程式の一般解を求めなさい. (u もしくは v のみの 4 階の微分方程式に書き直して, 推定法で解く. もしくは, 第 1 式と, 第 2 式に純虚数 i を掛けたものを足し, $\hat{u} \equiv u + iv$ に関する 2 階の微分方程式に書き直して推定法で解く. 演習問題 (1) で証明した $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ を用いなさい.)
- b) $z \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow U_\infty, v \rightarrow 0, z = 0$ で $u = 0, v = 0$ という境界条件を満足する解を求めなさい. (各 z に対して u, v をプロットすると螺旋を描く. この螺旋は Ekman 螺旋と呼ばれる.)