地球惑星科学基礎III 演習 (2)

2008 年 10 月 10 日配布

1　定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式の問題

以下の微分方程式の一般解を求めなさい.

i)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 5x = 0$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 25x = 0$$

iii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4x = 0$$

iv)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = 0$$

v)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 5x = t^2 + 2e^{3t}$$

vi)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 25x = 20\cos 2t$$

vii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = f_0 \cos\omega t$$

ここで，ω, f_0 は実数の定数であるとする.

2　1 階の微分方程式の問題

講義で扱った 2 階の微分方程式のほかにも物理学の研究・勉強で頻繁に現れる微分方程式として 1 階の微分方程式がある．1 階の微分方程式でも定数係数を持つ場合には, 講義で扱ったのと同様の方法（“ 推定法 ”）で解くことが出来る．その他の場合には変数分離法で説ける場合が多い.（むしろ 1 階の微分方程式は変数分離法で解くことが常套手段のようである.）

i)　次の微分方程式を，以下の 2 つの方法で解きなさい．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega x = 0. \tag{1}$$

ここで，ω は実数の定数であるとする．

a) 定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式と同様に推定法を用いて解きなさい．

b) 変数分離法を用いて解きなさい．

ii) 次の微分方程式を，前設問 i) の解を参考にして，係数変化法を用いて解きなさい．（解は $f(t)$ の積分を含む形で与えられる．$f(t)$ が陽に与えられていないので，その積分は実行できない．したがってここで得られる解は形式解である.）

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega x = f(t).$$

ここで，ω は実数の定数, $f(t)$ は t の既知関数とする．

3　発展問題

i) 次の連立微分方程式は, 大気の下層や海洋の表層の流れを記述する方程式で Ekman 方程式と呼ばれるものである．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} - v = 0,\\ \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2} + u = u_\infty.\end{aligned}$$

ここで, u_∞ は定数である．

a) 上記の連立微分方程式の一般解を求めなさい．(u もしくは v のみの 4 階の微分方程式に書き直して, 推定法で解く．もしくは, 第 1 式と, 第 2 式に純虚数 i を掛けたものとを足し, $\hat{u} \equiv u + iv$ に関する 2 階の微分方程式に書き直して推定法で解く．演習問題 (1) で証明した $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ を用いなさい.)

b) $z \to \infty$ で $u \to 0$, $v \to 0$, $z = 0$ で $u = U_\infty, v = 0$ という境界条件を満足する解を求めなさい．(各 z に対して u, v をプロットすると螺旋を描く．この螺旋は Ekman 螺旋と呼ばれる.)