

# 地球惑星科学基礎III 演習(6)

2007年11月30日配布

## 1 複素 Fourier 級数に関する問題

- i)  $-L < x < L$  の範囲で定義された周期  $2L$  の関数  $f(x) = e^{kx}$  の複素 Fourier 級数表示は

$$f(x) = \frac{\sinh(kL)}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{k + i(n\pi/L)}{k^2 + (n\pi/L)^2} e^{in\pi x/L} \quad (1)$$

となることを証明しなさい。ここで  $k$  は  $k > 0$  である。

- ii)  $0 < x < T$  において  $f(x) = \frac{ax}{T}$  で与えられるのこぎり波（ただし、周期は  $T$ ）の複素 Fourier 級数を求めなさい。ただし、 $a$  は正の実数とする。
- iii)  $0 < x < 1$  において  $f(x) = A \sin \pi x$ ,  $f(x+L) = f(x)$ , ( $L=1$ ) で定義される関数の複素 Fourier 級数を求めなさい。ここで  $A$  はある定数とする。
- iv)  $-L < x < L$  の範囲で定義された周期  $2L$  の実関数  $f(x)$  の複素 Fourier 級数に関する Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2)$$

を実 Fourier 級数の Parseval の恒等式を使って証明しなさい。

- v)  $a$  を整数でない実数とする。関数  $f(x) = e^{iax}$ , ( $-\pi < x < \pi$ ) を複素 Fourier 級数に展開せよ。さらに Parseval の恒等式を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

を証明しなさい。注意：この問題では  $f(x)$  は複素関数なので、Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3)$$

であることに注意しなさい。