

地球惑星科学基礎III 演習(2)

2007年10月12日配布

1 定数係数を持った2階の線形常微分方程式の問題

以下の微分方程式の一般解を求めなさい.

i)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0$$

ii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 25x = 0$$

iii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

iv)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

v)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = t^2 + 2e^{3t}$$

vi)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 25x = 20\cos 2t$$

vii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = f_0\cos\omega t$$

ここで, ω, f_0 は実数の定数であるとする.

2 1 階の微分方程式の問題

- i) 次の微分方程式を，以下の 2 つの方法で解きなさい．

$$\frac{dx}{dt} + \omega x = 0. \quad (1)$$

ここで， ω は実数の定数であるとする．

- a) 定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式と同様に推定法を用いて解きなさい．
 - b) 変数分離法を用いて解きなさい．
- ii) 次の微分方程式を，前設問 i) の解を参考にして，係数変化法を用いて解きなさい．
(解は $f(t)$ の積分を含む形で与えられる． $f(t)$ が陽に与えられていないので，その積分は実行できない．したがってここで得られる解は形式解である．)

$$\frac{dx}{dt} + \omega x = f(t).$$

ここで， ω は実数の定数， $f(t)$ は t の既知関数とする．

3 応用問題

- i) 次の連立微分方程式は，大気の下層や海洋の表層の流れを記述する方程式で Ekman 方程式と呼ばれるものである．

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dz^2} - v &= 0, \\ \frac{d^2 v}{dz^2} + u &= u_\infty. \end{aligned}$$

ここで， u_∞ は定数である．

- a) 上記の連立微分方程式の一般解を求めなさい．(u もしくは v のみの 4 階の微分方程式に書き直して，推定法で解く．もしくは，第 1 式と，第 2 式に純虚数 i を掛けたものとを足し， $\hat{u} \equiv u + iv$ に関する 2 階の微分方程式に書き直して推定法で解く．演習問題 (1) で証明した $\sqrt{i} = (1 + i)/\sqrt{2}$ を用いなさい．)
- b) $z \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0, v \rightarrow 0$, $z = 0$ で $u = U_\infty, v = 0$ という境界条件を満足する解を求めなさい．(各 z に対して u, v をプロットすると螺旋を描く．この螺旋は Ekman 螺旋と呼ばれる．)