地球惑星科学基礎III 期末テストの傾向と対策

2007年2月2日実施

回答についての注意

- 結果だけを書くのではなく，式の展開などの途中経過もきちんと書くこと
- ベクトルとスカラーの区別をきちんとつけること．前者は明確に**太字**で書く．また，ベクトル積とスカラー積もきちんと符号を書いてください．前者は $\times$，後者は $\cdot$ です．

1　定数係数を持った2階の線形常微分方程式の問題

質量 m の質点が，重さの無視できる長さ l の伸びない紐によって吊るされているとする（図1参照）．質点を平衡の位置から，角度 θ だけ変位させたときの，質点の運動は以下の常微分方程式によって記述される：

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta \tag{1}$$

ここで，g は重力加速度である．この方程式に関する以下の設問に答えなさい．

(i) (1) は線形の微分方程式か，それとも非線形の微分方程式か，を調べなさい．[1]

(ii) (1) において θ が小さい場合（$\theta \ll 1$），即ち，微小振動の微分方程式は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\theta \tag{2}$$

となることを示しなさい．

(iii) (2) は線形の微分方程式か，それとも非線形の微分方程式か，を調べなさい．

[1] ヒント：線形の微分方程式であれば，もし (1) を満足する解が2つ，それらを θ_1, θ_2 とする，が見つかったとき，c_1, c_2 を任意定数として，$c_1\theta_1 + c_2\theta_2$ も (1) の解になる．

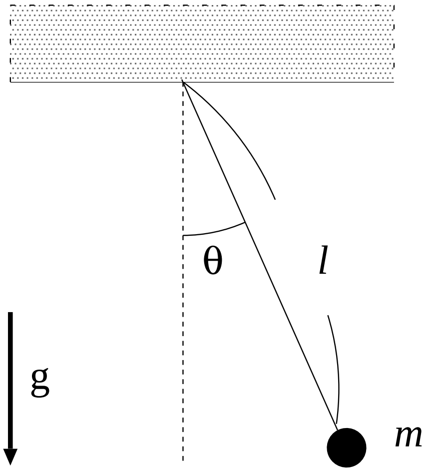

図 1: 質量 m の質点が，重さの無視できる長さ l の伸びない紐の端に吊るされた振り子.

(iv) (2) の一般解を推定法を用いて求めなさい.

(v) 初期条件, $\theta(t=0)=\theta_0$, $\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}=0$ を満足する (2) の解を求めなさい.

(vi) 質点に外力 $F=A\sin(\omega_0 t)$, （ここで，A は定数，$\omega_0\neq\sqrt{\frac{g}{l}}$）が作用する場合，質点の運動方程式は微小振幅の場合

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mg\sin\theta+A\sin(\omega_0 t) \tag{3}$$

となる．この常微分方程式の一般解を求めなさい.

(vii) (3) において，$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$ の場合の常微分方程式の一般解を求めなさい.

2 Fourier 級数の問題

区間 $-L<x<L$ の範囲内で定義され，その外側の区間では $f(x)=f(x+2L)$, 即ち周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ は，三角関数を用いて以下の様に Fourier 級数展開できる：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}. \tag{4}$$

Fourier 係数 a_n, $(n = 0,\, 1,\, 2, \ldots)$, b_n, $(n = 1,\, 2, \ldots)$ は

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, &(5)\\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, &(6)
\end{aligned}
$$

で与えられる．このとき，以下の問いに答えなさい．

(i) $-\pi < x < \pi$ の範囲で $f(x) = x^2$ であり，周期 2π の実関数 $f(x)$ の実 Fourier 級数展開を以下の設問にしたがって求めなさい．

(a) $-\pi < x < \pi$ の範囲で，$f(x)$ を図示しなさい．

(b) $f(x)$ の Fourier 係数を求めなさい．

(c) $f(x)$ の Fourier 級数展開のはじめの 3 項までを書き下しなさい．

(d) $f(x)$ の Fourier 級数展開のはじめの 2 項までを $-\pi \le x \le \pi$ の範囲で図示しなさい．

(e) 無限級数和

$$
\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \tag{7}
$$

を求めなさい．

3 複素 Fourier 級数の問題

$-L < x < L$ の範囲で定義された周期 $2L$ の関数 $f(x)$ は

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \tag{8}
$$

と表現できる．このとき以下の問いに答えなさい．

(i) 複素 Fourier 係数 c_n は

$$
c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x \tag{9}
$$

で与えられることを証明しなさい．**注意：$f(x)$ の Fourier 級数展開 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L})$ を用いた証明ではなく，**(10) **から直接 c_n の表現を導きなさい．**

(ii) 関数 $f(x)$ が実関数であるための条件は，$c_n^* = c_{-n}$ であることを示しなさい．ここで，* は複素共役を表す．

4　Fourier 変換の問題

実 Fourier 級数，複素 Fourier 級数，Fourier 変換の間の関係を簡潔に述べなさい．（図解でもよい．）

5　拡散方程式の問題

以下の方程式 (10)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\kappa > 0) \tag{10}$$

を，境界条件

$$u(0,\, t) = u(L,\, t) = 0 \tag{11}$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \tag{12}$$

のもとで解くことを考える．以下の設問に答えなさい．

(i) 方程式 (10) の名称を答えなさい．

(ii) 方程式 (10) は線形の微分方程式か，それとも非線形の微分方程式か答えなさい．

(iii) (10) の未知変数を

$$u(x,\, t) = X(x)T(t) \tag{13}$$

とおき，(10) と解く方法はなんと呼ばれているか答えなさい．（ヒント：????法．）

(iv) $X(x)$, $T(t)$ がそれぞれ満たす方程式を求めなさい．

(v) 前設問で導かれた T に関する方程式の一般解を求めなさい．（注意：変数分離を行った後の分離定数についての議論も詳しく行いなさい．）

(vi) 設問 (iv) で導かれた X に関する方程式の一般解を求めなさい．

(vii) 境界条件 (11) は $u(x, t)$ に関する条件になっている．これを $X(x)$ に関する条件に書き換えなさい．

(viii) (vii) で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求めなさい．

(ix) 重ね合わせの原理により $u(x,\, t)$ を求めなさい．

(x) 初期条件を満足する $u(x,\, t)$ を求めなさい．

6　Gauss 積分の問題

以下の積分を実行しなさい．（ただし, $\alpha > 0$ とする.）

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right)\, \mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^2 \exp\left(-\alpha x^2\right)\, \mathrm{d}x$

(iii) $\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, r dx$ で定義される Gamma 関数の $\Gamma(\frac{1}{2})$ の値.

7　和の規約の問題

和の規約を用いて，以下を証明しなさい.

(i) ベクトル恒等式 $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0$

(ii) ベクトル恒等式 $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0$