

地球惑星科学基礎 III 演習 (6)

2006 年 12 月 1 日配布

1 複素 Fourier 級数に関する問題

- i) $-L < x < L$ の範囲で定義された周期 $2L$ の関数 $f(x) = e^{kx}$ の複素 Fourier 級数表示は

$$f(x) = \frac{\sinh(kL)}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{k + i(n\pi/L)}{k^2 + (n\pi/L)^2} e^{in\pi x/L} \quad (1)$$

となることを証明しなさい。ここで k は $k > 0$ である。

- ii) $0 < x < T$ において $f(x) = \frac{ax}{T}$ で与えられるのこぎり波 (ただし, 周期は T) の複素 Fourier 級数を求めなさい。ただし, a は正の実数とする。
- iii) $0 < x < 1$ において $f(x) = A \sin \pi x$, $f(x+L) = f(x)$, ($L=1$) で定義される関数の複素 Fourier 級数を求めなさい。ここで A はある定数とする。
- iv) $-L < x < L$ の範囲で定義された周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ の複素 Fourier 級数に関する Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2)$$

を実 Fourier 級数の Parseval の恒等式を使って証明しなさい。

- v) a を整数でない実数とする。関数 $f(x) = e^{iax}$, ($-\pi < x < \pi$) を複素 Fourier 級数に展開せよ。さらに Parseval の恒等式を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

を証明しなさい。注意: この問題では $f(x)$ は複素関数なので, Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3)$$

であることに注意しなさい。