地球惑星科学基礎III 演習 (5)

2006 年 12 月 1 日配布

1 Fourier 級数の問題 (2)

i) a) 以下の関数に対応する Fourier 係数を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (-5 < x < 0) \\ 3, & (0 < x < 5) \end{cases}$$ 周期は 10 とする．

b) 対応する Fourier 級数を書き下しなさい．

c) $-5 \le x \le 5$ の区間で Fourier 級数が $f(x)$ に収束するためには，$f(x)$ は $x = -5, 0, 5$ においてどのように定義されるべきであるか．

ii) $-\pi < x < \pi$ において $f(x) = x^2$ となる周期 2π の関数を Fourier 級数展開しなさい．

iii) 前設問の結果を用いて，$\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$ を証明しなさい．

iv) 偶関数を Fourier 級数展開したときには sin の項は現われないことを証明しなさい．

v) $f(x)$ が $-L < x < L$ の区間で定義され，周期 $2L$ の奇関数のとき，この関数の Fourier 係数は

a) $a_n = 0$

b) $b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) \sin \dfrac{n\pi x}{L}\, \mathrm{d}x$,

となることを証明しなさい．

2 Parsevalの恒等式の問題

i) 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ が区間 $(-L,\, L)$ において $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\,\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ に収束するとき, Parseval の恒等式

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \tag{1}$$

を証明しなさい.

ii) 次の関数を Fourier 級数展開しなさい:

a) $f(x)=\begin{cases} x, & (0\le x<2) \\ -x, & (-2<x<0) \end{cases}$
周期 4.

b) 前設問の Fourier 級数に対応する Parseval の恒等式を書き下しなさい.

c) 前設問の結果をもちいて, 無限級数和

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\frac{1}{n^4}+\cdots \tag{2}$$

を求めなさい.

iii) 正の定数 M について,

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,\mathrm{d}x\ge\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2+b_n^2\right) \tag{3}$$

となることを証明しなさい．ただし，ここで $a_n,\, b_n$ は $f(x)$ の Fourier 係数で $f(x)$ は Dirichlet の条件を満足するものとする．[1]

[1]すなわち，$f(x)$ が Fourier 級数展開できるものとする．