

地球惑星科学基礎 III 演習 (3)

2006 年 11 月 10 日配布

ちょっと高度な話題

1 Sturm-Liouville 型の微分方程式

1.1 はじめに

地球惑星科学で登場する微分方程式は、次のような形式のものが多い：

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right\} y(x) = \lambda r(x) y(x). \quad (1)$$

ここで、 λ は未定の定数で、 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ は既知の x の関数である。方程式 (1) は Sturm-Liouville 型の微分方程式と呼ばれ、 p , q , r を適当に選ぶと著名な種々の微分方程式が得られる。

例 1： 三角関数や双曲線関数が解となる

$$\frac{d^2}{dx^2} y = \lambda y \quad (2)$$

は (1) において、 $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$ の場合である。 $\lambda < 0$ のとき三角関数が、 $\lambda > 0$ のとき双曲線関数が解となる。

例 2： Hermite の微分方程式，

$$\frac{d^2}{dx^2} y - 2x \frac{d}{dx} y + 2ny = 0, \quad (3)$$

は (1) において $p = \exp(-x^2)$, $q = 0$, $r = \exp(-x^2)$, $\lambda = -2n$ の場合である。ここで、 n は 0 または正の整数である。この方程式の解は多項式で与えられ、Hermite 多項式と呼ばれ、通常 $H_n(x)$ と表される。地球の大気・海洋中には様々な種類の波動が存在し、赤道付近に捕捉された波動（赤道波と呼ばれる）の従う方程式は (3) の形に変形することができる。（量子力学を習うと、調和振動子の Schrödinger 方程式の解く際にこの特殊関数が登場する。）

例 3 : Bessel の微分方程式 ,

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y + x \frac{d}{dx} y + (x^2 - n^2) y = 0, \quad (4)$$

は (1) で $p = x$, $q = x$, $r = 1/x$, $\lambda = n^2$ の場合である . ここで , n は 0 または正の定数である . この方程式の解は Bessel 関数と呼ばれ , $J_n(x)$ と表される . Bessel 関数は円筒関数もしくは円柱関数と呼ばれ , 円柱状の境界値問題ではこの関数が登場する . 大気・海洋中には円形の渦が卓越するが , このような渦の安定性を吟味するときに Bessel の微分方程式や Bessel 関数が登場する .

例 4 : Laguerre の微分方程式 ,

$$x \frac{d^2}{dx^2} y + (1 - x) \frac{d}{dx} y + \alpha y = 0, \quad (5)$$

は (1) において $p = x \exp(-x)$, $q = 0$, $r = \exp(-x)$, $\lambda = -\alpha$ の場合である . この方程式の解は Laguerre の多項式と呼ばれ , 通常 $L_n(x)$ で表される .

例 5 : Laguerre の多項式を k 階微分した多項式は Laguerre の陪多項式と呼ばれ , $L_n^k(x)$ で表される . この多項式は次の微分方程式の解となる :

$$x \frac{d^2}{dx^2} y + (k + 1 - x) \frac{d}{dx} y + (\alpha - k) y = 0. \quad (6)$$

この微分方程式は Laguerre の陪微分方程式といい , これは (1) で $p = x^{k+1} \exp(-x)$, $q = 0$, $r = x^k \exp(-x)$, $\lambda = k - \alpha$ 場合である .

例 6 : Legendre の微分方程式 ,

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} y - 2x \frac{d}{dx} y + l(l + 1) y = 0, \quad (7)$$

は (1) で $p = 1 - x^2$, $q = 0$, $r = -1$, $\lambda = l(l + 1)$ の場合である . ここで , n は正の整数である . この方程式の解は多項式で与えられ , Legendre の多項式と呼ばれ , 通常 $P_l(x)$ と書かれる .

例 7 : Legendre の多項式 $P_l(x)$ を , m 階微分したものに $(1 - x^2)^{m/2}$ を乗じたものは Legendre の陪多項式と呼ばれ , $P_l^{(m)} \equiv (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ と書かれる . この多項式は次の微分方程式の解となる :

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} y - 2(m + 1)x \frac{d}{dx} y + \{l(l + 1) - m(m + 1)\} y = 0. \quad (8)$$

この微分方程式は Legendre の陪微分方程式と呼ばれ , これは (1) において $p = (1 - x^2)^{m+1}$, $q = 0$, $r = -(1 - x^2)^m$, $\lambda = l(l + 1) - m(m + 1)$ の場合である . ここで , m は 0 または正の整数 (ただし , $l > m$) である . 地球大気の運動は , 球面上に張り付いた流体 (気体や液体の総称) の運動と考えることができる . このような運動を考察する際に , Legendre の陪多項式を用いると便利である . また , 気象の数値実験 (天気予報) を精度よく行う際にも , Legendre の陪多項式が必要となる .

1.2 演習問題

- i) (3) ~ (8) が Sturm-Liouville 型の微分方程式であることを確かめなさい。
- ii) Sturm-Liouville 型の微分方程式は線形微分方程式であることを確かめなさい。

補足： (1) は

$$p \frac{d^2}{dx^2} y + p' \frac{d}{dx} y + (q - \lambda r) y = 0, \quad (9)$$

と書き直せる。ここで、 $p' = \frac{dp}{dx}$ である。Sturm-Liouville 型の微分方程式は定数係数ではないが 2 階の線形常微分方程式である。

2 微分方程式の級数解法

2.1 はじめに

前の節で挙げた例 2 ~ 7 の多項式や関数は特殊関数と呼ばれる。それらの従う微分方程式をとりて解を得ようとするとき、 $y = e^{\alpha x}$ と置く推定法では解くことができない。このような方程式を解くには、級数展開法と呼ばれるものを使う。

この解法のエッセンスは、解を

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_{-m}}{x^m} + \frac{a_{-m+1}}{x^{m-1}} + \dots + a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \\ &= \sum_{i=-m}^{\infty} a_i x^i \end{aligned} \quad (10)$$

と級数で表現する。これをもとの微分方程式に代入して係数 a_n を決める。通常は a_n の漸化関係式が得られる。

どの項から展開を始めるか、即ち m の値をいくつにとるか、また (10) の展開が収束するための条件を考慮する必要があるなど、他に説明すべきことはあるが、ここではそのような問題は伏せておいて、解のよく知られた微分方程式を級数展開法で解いて、級数展開法に触れて見よう。

2.2 演習問題

- i) 指数関数 $y = e^{\lambda x}$ を $x = 0$ を中心に Taylor 展開しなさい。
- ii) 定数係数を持った 1 階の線形微分方程式

$$\frac{d}{dx} y = \lambda y \quad (11)$$

を級数展開法で解きなさい。ここで、 λ は定数であり、解は

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \end{aligned} \quad (12)$$

と展開できると仮定する . (12) を (11) に代入することにより係数 a_i の従う漸化関係式を導きなさい .

iii) 前設問で導いた級数が指数関数であることを確かめなさい .