第 4 章

Fourier 変換と Fourier 積分

4.1 復習

4.1.1 実 Fourier 級数

$-L < x < L$ の範囲（即ち**有限区間**）内で定義され, $2L$ の周期を持つ**実関数** $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x) \tag{4.1}$$

と展開できる．ここで $k_n \equiv n\pi/L$ であり, Fourier 係数 a_n，b_n は

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos k_n x \,\mathrm{d}x, \quad (n = 0, 1, 2\ldots) \tag{4.2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin k_n x \,\mathrm{d}x, \quad (n = 1, 2\ldots) \tag{4.3}$$

で与えられる．これが全ての基本である．

4.1.2 Fourier 級数の複素表現

上記の展開で，三角関数を Euler の関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて書き直すと Fourier 級数展開 (4.1) は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \tag{4.4}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-ik_n x}\,\mathrm{d}x \tag{4.5}$$

と書ける．$f(x)$ が実関数でなくても (4.1), (4.4) のように展開できる．ただし，$f(x)$ が実関数のとき, 複素表示の Fourier 級数展開では $c_n = c_{-n}^*$ の関係が存在する．

4.2　Fourier 変換

有限区間で定義された**周期関数**を三角関数で展開したのが Fourier 展開であった．取り扱う関数を有限区間で定義された**周期関数**から**無限区間** $-\infty < x < \infty$ **で定義された関数**（周期は無限大, 即ち周期関数でなくてもよい）に拡張した Fourier 級数展開の複素表示が, 以下で説明する Fourier 変換である．このとき，展開は無限級数の形ではなく, 積分の形で表現される．

4.2.1　Fourier 変換の導出

Step 1　：　(4.5) を (4.4) に代入する: [*1]

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left\{ \int_{-L}^{L} f(x') e^{-ik_n x'} \mathrm{d}x' \right\} e^{ik_n x} \tag{4.6}$$

係数 $1/(2L)$ は $1/(2L) = \Delta k/(2\pi)$ と表現できる．ここで, $\Delta k \equiv k_n - k_{n-1}$ である．従って, (4.6) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \left\{ \int_{-L}^{L} f(x') e^{-ik_n x'} \mathrm{d}x' \right\} e^{ik_n x} \tag{4.7}$$

と書ける．

Step 2　：　$L \to \infty$ の極限をとる．即ち，関数の周期を無限に長いとする．このとき, 離散的変数（離散的波数）であった k_n は連続的変数（連続的波数）になり, また, 和は積分に置き換えられる（n に関する和は, k に関する積分に置き換えられる）:[*2]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \to \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k. \tag{4.8}$$

従って, (4.7) は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} \mathrm{d}x' \right\} e^{ikx} \tag{4.9}$$

と書ける．

[*1] c_n の積分の積分変数に注意．積分変数には任意の文字が使える．ここでは $f(x)$ の変数 x との混同を避けるため, c_n の積分変数には x' を用いることにする．

[*2] 区分求積法の極限が積分になることを思い出そう．

Step 3(final step) ： ここで,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} \mathrm{d}x' \tag{4.10}$$

と置くと, (4.9) のように表現された $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}k \tag{4.11}$$

と表現できる. (4.10) は関数 $f(x)$ の **Fourier 変換**と呼ばれ, しばしば $\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ と書かれる. 一方, $f(x)$ は $\hat{f}(k)$ の**逆 Fourier 変換** (inverse Fourier transform) と呼ばれ, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\}$ と書かれる.

4.2.2 いくつかの注意

Note 1 ： (4.9) はある関数 $f(x)$ を Fourier 変換し, さらにそれを逆変換すれば, もとの関数 $f(x)$ に戻る:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\{f(x)\}\right]. \tag{4.12}$$

ことを言っているに過ぎない.

Note 2 ： (4.9) を

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' f(x') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} \mathrm{d}k \right\} \tag{4.13}$$

と書き換えておくと,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') \mathrm{d}x' = f(x) \tag{4.14}$$

という性質を持った関数 $\delta(x-x')$,

$$\delta(x-x') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} \mathrm{d}k, \tag{4.15}$$

が存在することが期待される. 実際, このような関数は **Delta 関数** (もしくはこの関数を提唱した人の名前をつけて, Dirac の Delta 関数) と呼ばれ, 量子力学を定式化するときに Dirac が導入した関数である. この関数は一般の関数とは異なった性質を持っており超関数という部類の関数に位置付けられる.[*3] (4.14) で $f(x) = 1$

[*3] Dirac が Delta 関数を導入してから, 数学にあらたに超関数を研究する分野が出来上がったらしい. Delta 関数が量子力学にいかに導入されたかは, Dirac の量子力学のテキスト, Principles of Quantum Mechanics, Oxford Univ. Press (日本ではみすず書房が発行), 日本語訳は岩波書店が発行, を参照して欲しい. これも理学部の大学生としては一度は手にとって眺めておいて欲しい書物である.

とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{4.16}$$

が導かれる．これも Delta 関数の重要な性質の一つである．Delta 関数は Kroneker の Delta,

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \tag{4.17}$$

ここで m, n は整数, の連続変数版 (m, n が整数ではなく実数の場合の Kroneker の Delta) と見なせる．

Note 3　：　(4.10), (4.11) に現れる係数 $1/(\sqrt{2\pi})$ は Fourier 変換, 逆 Fourier 変換が対称的な形になるように選んである．テキストによっては,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}\mathrm{d}x' \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{4.18}$$

や

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}\mathrm{d}x' \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{4.19}$$

と表現している場合がある．これは (4.9) に現れている係数 $1/(2\pi)$ を分解するか, という任意性に由来している．ともかく, 正変換のあと逆変換して元の関数に戻るように係数をうまく分解してくっつけておけばよい．

Note 4　：　テキストによっては, Fourier 変換, Fourier 逆変換を

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{ikx'}\,\mathrm{d}x' \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{-ikx}\,\mathrm{d}k \tag{4.20}$$

と表現している場合もある．上式は $x \to -x$, $k \to -k$ という変数変換によって, 先の公式 (4.10), (4.11) に戻る．これも, 正変換を, $\int \ldots e^{ikx}\,\mathrm{d}x$ で定義したら, 逆変換を $\int \ldots e^{-ikx}\,\mathrm{d}k$ で定義するという風に, やはり正変換のあと逆変換して元の関数に戻るようになっていればよい．（Delta 関数についても同様.）

Note 5　:　$f(x)$ が実であれば,

$$\hat{f}(-k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}\mathrm{d}x' = \hat{f}(k)^* \tag{4.21}$$

である．これは複素表示の Fourier 級数における Fourier 係数 c_n が満足する関係 $c_{-n} = c_n^*$ に対応するものである．

Note 6 : Parseval の恒等式は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(k) \right|^2 \mathrm{d}k \tag{4.22}$$

と表せる.

Note 7 : 複素 Fourier 級数の補足説明でも同様のことを述べたが, 関数 $f(x)$ が (4.11) の右辺のように表現できることを認めれば, Fourier 変換の公式 (4.10) の公式は, 以下のように導くことができる.

(4.11) の両辺に $e^{ik'x}$ を乗じて x について $-\infty$ から ∞ まで積分する.

$$\mathrm{l.h.s} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ik'x} \, \mathrm{d}x.$$

$$\mathrm{r.h.s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \hat{f}(k) e^{i(k+k')x}.$$

ここで,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+k')x} \, \mathrm{d}x = 2\pi\delta(k+k'),$$

を用いると,

$$\mathrm{r.h.s} = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \hat{f}(k) \delta(k+k') = \sqrt{2\pi} \hat{f}(-k').$$

以上を整理すると,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x,$$

すなわち (4.10) を得る.

4.3 Fourier 積分

Fourier 変換とは, 周期的な関数の表現である複素 Fourier 級数展開を, 周期のない関数に拡張したものであることは前節で示した. いっぽう複素 Fourier 級数展開とは, Fourier 級数展開の展開関数である三角関数を Euler の関係式を用いて単に書き直したものである. したがって, 上記の 2 つの関係から, 周期的な関数の表現である Fourier 級数展開を, 周期のない関数に拡張した表現も存在するであろうことは容易に想像がつく. それは Fourier 積分と呼ばれるものである.

通常のテキストでは, Fourier 級数展開の拡張として Fourier 積分を導入し, さらにそれを複素表示して Fourier 変換を導入するが, ここでは順序を逆にして, Fourier 変換から Fourier 積分を導いてみる.

4.3.1　Fourier 積分の導出

Step 1　　$f(x)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(k)$ とし，

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{4.23}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{4.24}$$

と定義する．このとき，$f(x)$ が実数関数であるという要請から，

$$\hat{f}(-k)^* = \hat{f}(k) \tag{4.25}$$

となる．

Step 2　　(4.24) を以下のように変形する：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k.$$

上式右辺第二項は積分変数を $k \to -k$ と変換し，さらに (4.25) の関係式を用いると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \hat{f}(k)^*e^{-ikx}\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \left(\hat{f}(k)e^{ikx} + \hat{f}(k)^*e^{-ikx}\right)\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\hat{f}(k)e^{ikx}\right]\mathrm{d}k. \end{aligned} \tag{4.26}$$

$\hat{f}(k)$ の実部，虚部をそれぞれ $\hat{f}_{\mathrm{r}}(k)$, $\hat{f}_{\mathrm{i}}(k)$ とすると，(4.26) は

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left\{\hat{f}_{\mathrm{r}}(k)\cos kx - \hat{f}_{\mathrm{i}}(k)\sin kx\right\}\mathrm{d}k \tag{4.27}$$

となる．

Step 3　　(4.23) より

$$\hat{f}_{\mathrm{r}}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x,$$

$$\hat{f}_{\mathrm{i}}(k) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x,$$

とあたえられるので，あらためて $A(k)$, $B(k)$ として

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos kx\mathrm{d}x, \tag{4.28}$$

$$B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, \tag{4.29}$$

を定義すると，(4.27) は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{A(k)\cos kx + B(k)\sin kx\}\ \mathrm{d}k \tag{4.30}$$

となる．(4.30) を $f(x)$ の Fourier 積分表示という．

4.3.2　いくつかの注意

Note 1:　テキストによっては Fourier 積分は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\xi f(\xi)\cos k(x-\xi) \tag{4.31}$$

と表現しているものもある．これは，(4.30) の $A(k)$, $B(k)$ に (4.28), (4.29) を代入すれば直ちに得られる．

Note 2:　周期関数 $f(x)$ の Fourier 級数展開を周期のない関数に拡張するというやり方（これは Fourier 変換の導出のところで行ったものと全く同じやり方）で (4.28), (4.29), (4.30) を導くことが出来る．

4.4　まとめ

Fourier 級数，複素 Fourier 級数，Fourier 積分，Fourier 変換の相互の関係は以下のようにまとめることが出来る．

Fourier 級数	→ (Euler の関係式を用いて複素表示) →	**複素 Fourier 級数**
↓		↓
(周期関数から非周期関数へ拡張)		(周期関数から非周期関数へ拡張)
↓		↓
Fourier 積分	→ (Euler の関係式を用いて複素表示) →	**Fourier 変換**