

地球惑星科学基礎 III 演習 (1)

2005 年 10 月 7 日配布

1 Euler の関係式

- i) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ を Euler の関係式を用いて証明しなさい .
- ii) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$ を Euler の関係式を用いて証明しなさい .
- iii) $\sqrt{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ を証明しなさい .
- iv) 双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (1)$$

は $\sinh x = -i \sin(ix)$ であることを確かめなさい . 同様に双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2)$$

は $\cosh x = \cos(ix)$ であることを確かめなさい .

- v) $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$ を前設問の結果を使って証明しなさい . 同様に $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$ を前設問の結果を使って証明しなさい .

2 微分方程式について

i) 以下の微分方程式は線形の微分方程式かそれとも非線形の微分方程式か答えなさい。

a) 質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれている場合，質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式，

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0. \quad (3)$$

b) 重力場中で長さ l の伸びない紐の端に 質量 m のおもりがつるされているとする．この振り子（重り）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0. \quad (4)$$

ここで， g は重力加速度である．

c) 方程式 (4) で振れ角 θ が小さい場合

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg\theta = 0 \quad (5)$$

d) ia) の状況で速度に比例する抵抗が質点に働いている場合の質点の微分方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (6)$$

ここで， $\gamma > 0$ である．

ii) 微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

が

$$x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

の解を持つことを示しなさい．ここで， A, B は任意定数である．またこの解が以下の形にかけられることを示しなさい：

$$\begin{aligned} x &= C \cos(\omega t + \alpha), \\ &= D \sin(\omega t + \beta), \end{aligned}$$

さらに， C, D, α, β を A, B で表現しなさい．

補足： C, D は振幅， α, β は位相と呼ばれる．