

地球惑星科学基礎 III 期末テスト

2005 年 1 月 21 日実施

平成 17 年 1 月 21 日

1 Fourier 級数，直交関数展開に関する問題

区間 $-L < x < L$ の間で定義された周期 $2L$ の実数関数が

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

と表現できる．このとき，Parseval の恒等式

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

を証明しなさい．

2 偏微分方程式の解法，および，Fourier 級数に関する問題

区間 $0 < x < L$ において，ある物理量 $u(x, t)$ が 1 次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\kappa > 0) \quad (1)$$

を満足する．境界条件

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (2)$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$

のもとで (1) を解くことを考える．以下の設問に答えなさい．

i) 変数分離法を用いて解くことを考える．

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

とおく．このとき， $X(x)$ ， $T(t)$ がそれぞれ満たす方程式を求めなさい．

- ii) 前設問で導かれた方程式の一般解 $X(x), T(t)$ を求めなさい。このとき、変数分離定数の符号に関する議論も同時に行いなさい。
- iii) 境界条件 (2) を $X(x)$ に関する条件に書き換えなさい。
- iv) iii) で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求めなさい。
- v) 重ね合わせの原理により $u(x, t)$ を求めなさい。
- vi) 初期条件を満足する $u(x, t)$ を求めなさい。

3 Gauss 積分, delta 関数に関する問題

以下の積分を実行しなさい。(ただし, $\alpha > 0$ とする.)

- i) $\int_{-\infty}^{\infty} \exp i -\alpha x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ を用いて, $\int_0^{\infty} x^2 \exp i -\alpha x^2 dx$ を求めなさい。
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx$. ここで, a は任意の実数で, $f(x)$ は任意関数である。

4 和の規約の問題

和の規約を用いて, 以下を証明しなさい。

- i) ベクトル三重積に関する公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

- ii) ベクトル恒等式 $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$
- iii) ベクトル恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$