地球惑星科学基礎III 中間テスト

2004.11.26 実施

i) 質量 m の質点が，重さの無視できる長さ l の伸びない紐によって吊るされているとする（図 1 参照）．質点を平衡の位置から，角度 θ だけ変位させたときに，質点の運動は以下の運動方程式によって記述される：

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta \tag{1}$$

ここで，g は重力加速度である．この方程式に関する以下の設問に答えなさい．

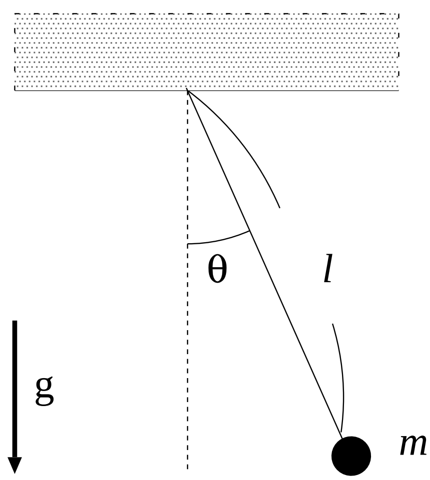

図 1: 質量 m の質点が，重さの無視できる長さ l の伸びない紐の端に吊るされた振り子．

a) (1) は線形の微分方程式か，それとも非線形の微分方程式か，を調べなさい．[1]

b) (1) において θ が小さい場合（$\theta \ll 1$），即ち，微小振動の微分方程式は

$$ml^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\theta \tag{2}$$

となることを示しなさい．

c) (2) は線形の微分方程式か，それとも非線形の微分方程式か，を調べなさい．

[1] ヒント：線形の微分方程式であれば，もし (1) を満足する解が 2 つ，それらを θ_1, θ_2 とする，が見つかったとき，c_1, c_2 を任意定数として，$c_1\theta_1 + c_2\theta_2$ も (1) の解になる．

d) (2) の一般解を求めなさい.

e) 初期条件 $t=0$ において，$\theta=\theta_0$, $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$ を満足する (2) の解を求めなさい.

f) (2) に外力 $F=A\sin(\omega_0 t)$,（ここで，A は定数，$\omega_0 \neq \sqrt{\frac{g}{l}}$）が加わったときの一般解を求めなさい.

ii) 区間 $c<t<c+T$ の範囲内で定義され，その外側の区間では $f(t)=f(t+T)$，即ち周期 T，の関数 $f(t)$ は，周期 T の三角関数を用いて以下の様に級数展開できる：

$$f(t)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi t}{T}\right\}. \tag{3}$$

展開係数 A, a_n, b_n を与える式が,

$$A = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t, \tag{5}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

となることを証明しなさい.

iii) $-\pi\leq x\leq\pi$ の範囲で $f(x)=|x|$ であり，周期 2π の関数 $f(x)$ の実 Fourier 級数展開を以下の設問にしたがって求めなさい.

a) $-3\pi\leq x\leq 3\pi$ の範囲で，$f(x)$ を図示しなさい.

b) $f(x)$ の Fourier 係数を求めなさい.

c) $f(x)$ の Fourier 級数展開のはじめの 3 項までを書き下しなさい.

d) $f(x)$ の Fourier 級数展開のはじめの 2 項までを図示しなさい.

e) 無限級数和

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots \tag{7}$$

を計算しなさい.

iv) 実 Fourier 級数，複素 Fourier 級数，Fourier 変換の間の関係を簡潔に述べなさい.（図解でもよい.）

v) $-L<x<L$ の範囲で定義され，その外側では周期 $2L$ の関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\pi x/L} \tag{8}$$

と表現できる.

a) このとき，複素 Fourier 係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x \tag{9}$$

で与えられることを証明しなさい．[2]

b) 関数 $f(x)$ が実関数であるための条件は，$c_n^* = c_{-n}$ であることを示しなさい．ここで，* は複素共役を表す．

vi) 複素 Fourier 級数に関する Parseval の等式

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{10}$$

を証明しなさい．

[2] ヒント：$f(x)$ の Fourier 級数展開 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$ から証明してもよいが，(8) から直接 c_n の表現を導くほうが簡単です．a_n や b_n を導出したのと同じような方法を用いればよい．