地球惑星科学基礎III 演習(7)

2004年12月3日配布

1 拡散方程式の問題

i) 1次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (\kappa > 0) \tag{1}$$

を，境界条件

$$\frac{\partial u(0,\, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,\, t)}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \tag{3}$$

のもとで解くことを考える．以下の設問に答えなさい.

a) 変数分離法を用いて解く.

$$u(x,\, t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

とおく．このとき，$X(x)$, $T(t)$ がそれぞれ満たす方程式を求めなさい.

b) 前設問で導かれた方程式の一般解を求めなさい.

c) 境界条件 (2) を $X(x)$ に関する条件に書き換えなさい.

d) ic) で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求めなさい.

e) 重ね合わせの原理により $u(x,\, t)$ を求めなさい.

f) 初期条件を満足する $u(x,\, t)$ を求めなさい.

ii) 長さ L の棒の両端は常に温度0に保たれている．すなわち，$u(0,\, t) = u(L,\, t) = 0$. 初期の温度分布が以下のように与えられるとき，熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (\kappa > 0) \tag{5}$$

の解を求めなさい.

a) a, b, c を定数として

$$u(x,0) = f(x) = a\sin\frac{4\pi x}{L} + b\sin\frac{8\pi x}{L} + c\sin\frac{12\pi x}{L}. \tag{6}$$

b)

$$u(x,0) = f(x) = ax(L-x). \tag{7}$$

iii) 無限に長い棒において，熱の初期分布 $u(x,0)$ が次のように与えられているとする．このとき，$t>0$ での熱の伝わり方を調べなさい．ここで, a, b は定数とする．

a) $u(x,0) = a$

b) $u(x,0) = a\delta(x)$

c) $u(x,0) = a\cos bx$