地球惑星科学基礎III 演習(6)

2004年11月19日配布,12月24日改訂

1　Fourier 変換に関する問題

i)　a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \tag{1}$$

b) $a = 3$ として, $f(x)$ とその Fourier 変換を図示しなさい.

ii)　a) 前問の結果を用いて, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \, \cos \alpha x}{\alpha} \mathrm{d}\alpha$ の値を見積もりなさい.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u$ の値を求めなさい.

iii)　a) $f(x)$ が偶関数の時, Fourier 変換の公式は以下のように与えられることを示しなさい.

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \cos kx \, \mathrm{d}k. \tag{3}$$

ヒント： $\hat{f}(k)$ が (2) で与えられるとき, $\hat{f}(k)$ は偶関数か奇関数か.

b) $f(x) = e^{-m|x|}$, $m > 0$ の Fourier 変換を求めなさい.

c) 前設問の結果を用いて,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + m^2} \mathrm{d}k = \frac{\pi}{2m} e^{-mx}, \qquad (m > 0,\ x > 0)$$

を示しなさい.

iv)　積分方程式

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 - \alpha, & 0 \le \alpha \le 1, \\ 0, & \alpha > 1, \end{cases} \tag{4}$$

を解きなさい.

v) Fourier 変換に関する以下の性質を証明しなさい．　ここで，$\hat{f}(k) = \mathsf{F}\{f(x)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$, $f(x) = \mathsf{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k$, とする．

a) $\mathsf{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha\mathsf{F}\{f(x)\} + \beta\mathsf{F}\{g(x)\}$

b) $\mathsf{F}\{f(x-\alpha)\} = e^{-ik\alpha}\mathsf{F}\{f(x)\}$

c) $\mathsf{F}\{e^{-\alpha x}f(x)\} = \hat{f}(k - i\alpha)$

d) $\mathsf{F}\{f(\gamma x)\} = \dfrac{1}{|\gamma|}\hat{f}\left(\dfrac{k}{\gamma}\right), \quad (\gamma \neq 0)$

e) $f(x)$ が微分可能で，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ のとき，$\mathsf{F}\left\{\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right\} = ik\mathsf{F}\{f(x)\}$

参考文献

[1] 和達三樹，例解　物理数学演習, 岩波書店 (1990).

[2] M. R. Spiegel, Fourier Analysis, McGraw-Hill(1974).