

# 地球惑星科学基礎 III 演習 (5)

2004 年 11 月 12 日配布 (11 月 19 日改訂)

## 1 複素 Fourier 級数に関する問題

- i)  $-L < x < L$  の範囲で定義された周期  $2L$  の関数  $f(x) = e^{kx}$  の複素 Fourier 級数表示は

$$f(x) = \frac{\sinh(kL)}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{k + i(n\pi/L)}{k^2 + (n\pi/L)^2} e^{in\pi x/L} \quad (1)$$

となることを証明しなさい。

- ii)  $0 < x < T$  において  $f(x) = \frac{ax}{T}$  で与えられるのこぎり波 (ただし, 周期は  $T$ ) の複素 Fourier 級数を求めなさい。ただし,  $a$  は正の実数とする。
- iii)  $0 < t < 1$  において  $f(t) = A \sin \pi t$ ,  $f(t+T) = f(t)$ , ( $T = 1$ ) で定義される関数の複素 Fourier 級数を求めなさい。ここで  $A$  はある定数とする。
- iv) 複素 Fourier 級数に関する Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2)$$

を実 Fourier 級数の Parseval の恒等式を使って証明しなさい。

- v)  $a$  を整数でない実数とする。関数  $f(x) = e^{iax}$ , ( $-\pi < x < \pi$ ) を複素 Fourier 級数に展開せよ。さらに Parseval の恒等式を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

を証明しなさい。