

# 地球惑星科学基礎 III 演習 (1)

2004 年 10 月 1 日配布

## 1 Euler の関係式

- i)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$  を Euler の関係式を用いて証明しなさい .
- ii)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$  を Euler の関係式を用いて証明しなさい .
- iii)  $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$  を証明しなさい .
- iv) 双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (1)$$

は  $\sinh x = -i \sin(ix)$  であることを確かめなさい . 同様に双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2)$$

は  $\cosh x = \cos(ix)$  であることを確かめなさい .

- v)  $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$  を前設問の結果を使って証明しなさい . 同様に  $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$  を前設問の結果を使って証明しなさい .
- vi) 以下の式を証明しなさい .

a)  $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

b)  $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

c)  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$

d)  $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$

補足 : これらの式は , 有限な Fourier 級数の例である .

## 2 振動の微分方程式について

i) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

が

$$x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

の解を持つことを示しなさい。ここで,  $A, B$  は任意定数である。またこの解が以下の形にかけられることを示しなさい:

$$\begin{aligned}x &= C \cos(\omega t + \alpha), \\ &= D \sin(\omega t + \beta),\end{aligned}$$

さらに,  $C, D, \alpha, \beta$  を  $A, B$  で表現しなさい。

補足:  $C, D$  は振幅,  $\alpha, \beta$  は位相と呼ばれる。