

地球惑星科学基礎 III 演習 (1)

2004 年 10 月 1 日配布

1 Euler の関係式

- i) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ を Euler の関係式を用いて証明しなさい .
- ii) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$ を Euler の関係式を用いて証明しなさい .
- iii) $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ を証明しなさい .
- iv) 双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (1)$$

は $\sinh x = -i \sin(ix)$ であることを確かめなさい . 同様に双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2)$$

は $\cosh x = \cos(ix)$ であることを確かめなさい .

- v) $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$ を前設問の結果を使って証明しなさい . 同様に $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$ を前設問の結果を使って証明しなさい .
- vi) 以下の式を証明しなさい .

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

b) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

c) $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$

d) $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$

補足 : これらの式は , 有限な Fourier 級数の例である .

2 振動の微分方程式について

i) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

が

$$x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

の解を持つことを示しなさい。ここで、 A, B は任意定数である。またこの解が以下の形にかけられることを示しなさい：

$$\begin{aligned}x &= C \cos(\omega t + \alpha), \\ &= D \sin(\omega t + \beta),\end{aligned}$$

さらに、 C, D, α, β を A, B で表現しなさい。

補足： C, D は振幅， α, β は位相と呼ばれる。