

第7章 和の規約

例えば, $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$ は和の記号を使って短い表記で $\sum_{i=1}^N a_i x_i$ と書くことができることは高校数学で習った. ここではさらに短い表記, 和の規約, もしくは Einstein の規約, と呼ばれるものについて紹介する. この表記を用いると, 複雑なベクトルの演算が非常に簡単にできる.

7.1 表記 (notation)

位置ベクトルを \boldsymbol{x} で表す. 慣例によると \boldsymbol{x} をデカルト座標系におけるその成分 x, y, z で表すと,

$$\boldsymbol{r} = x \boldsymbol{i} + y \boldsymbol{j} + z \boldsymbol{k} \quad (7.1)$$

となる. ここで, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ, x, y, z 方向の単位ベクトルである.

なお, 単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を, 添え字付きの文字を用いて, それぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ で表し, 成分 x, y, z を x_1, x_2, x_3 と表すこともある. 即ち添え字 1 が x 成分, 添え字 2 が y 成分, 添え字 3 が z 成分を表す. この章ではこの表記を採用する.

この表記よると (7.1) は

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3 \quad (7.2)$$

である. また任意のベクトル \boldsymbol{A} は

$$\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{e}_1 + A_2 \boldsymbol{e}_2 + A_3 \boldsymbol{e}_3 \quad (7.3)$$

と表記する.

偏微分記号, $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ は簡単化のために, $\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ と記す場合がある. これも先に採用した表記を用いると $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ となるがさらにコンパクトに, $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ と書く. このような表記では微分演算子 ∇ は

$$\nabla = \boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (7.4)$$

$$= \boldsymbol{i} \partial_x + \boldsymbol{j} \partial_y + \boldsymbol{k} \partial_z, \quad (7.5)$$

$$= \boldsymbol{e}_1 \partial_1 + \boldsymbol{e}_2 \partial_2 + \boldsymbol{e}_3 \partial_3 \quad (7.6)$$

となる.

7.2 和の規約 (summation rules, Einstein's notation)

一つの項の中に同じアルファベットの添字が2回用いられているとき, その添字について1から3までの和をとる. すなわち,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3, \\ &= \sum_{i=1}^3 x_i \boldsymbol{e}_i, \\ &= x_i \boldsymbol{e}_i. \end{aligned} \tag{7.7}$$

最後の最も簡単な表式が和の規約を用いて書かれたものである. 和の規約とはつまり \sum を省略することである.

注意1: 添字はどんな記号でも良い. とにかく2回繰り返して出てきたら和をとればよい. つまり $x_i \boldsymbol{e}_i = x_j \boldsymbol{e}_j = x_k \boldsymbol{e}_k$ である. このような理由から繰り返す添字は無効添字 (dummy index) と呼ばれる.

注意2: 2次元空間であれば, 和は1~2にわたってとる. N 次元であれば, 和は1~ N にわたってとる.

例:

$$\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_i. \tag{7.8}$$

$$\nabla \psi = \boldsymbol{e}_i \partial_i \psi. \tag{7.9}$$

$$\tag{7.10}$$

7.3 Kronecker のデルタ

2つの添え字を持ち, 以下のような性質を持つ量を Kronecker のデルタという:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & (i, j \text{ が異なる値を持つとき}). \\ 1, & (i, j \text{ が同じ値を持つとき}). \end{cases} \tag{7.11}$$

Kronecker のデルタの別の定義は

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{7.12}$$

である。または、

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \partial_j x_i = \delta_{ij}. \quad (7.13)$$

例：和の規約と Kronecker のデルタを用いると $\nabla \cdot \mathbf{A}$ は以下のようにかける：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \partial_i) \cdot (A_j \mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \partial_i A_j \\ &= \delta_{ij} \partial_i A_j \\ &= \partial_j A_j. \end{aligned} \quad (7.14)$$

7.4 Eddington のイプシロン

3つの添え字を持ち、以下のような性質を持つ量を Eddington のイプシロンという：

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \text{ のとき.} \\ -1, & (i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) \text{ のとき.} \\ 0, & \text{それ以外} \text{ のとき.} \end{cases} \quad (7.15)$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}. \quad (7.16)$$

$\varepsilon_{ijk} = 1$ となる場合は $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の偶置換, $\varepsilon_{ijk} = -1$ となる場合は $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の奇置換という。

例

行列

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の行列式は、Eddington のイプシロンを用いると

$$\begin{aligned} \det \underline{\mathbf{A}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

とあらわせる．また二つのベクトル A と B とのベクトル積は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i A_j B_k. \end{aligned} \quad (7.18)$$

となる．同様にして回転演算は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j A_k \end{aligned} \quad (7.19)$$

と表現できる．

演習問題

- i) 和の規約を用いて，以下を書き下しなさい．
 - a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
 - b) $df(x_1, x_2, x_3)$. ここで d は全微分である．
- ii) Kronecker のデルタの定義と和の規約を用いて, δ_{ii} の値を計算しなさい.
- iii) $\delta_{ij} A_j$ を求めなさい．
- iv) $\delta_{ij} \delta_{jk}$ を求めなさい．
- v) $(\partial_j x_i)(\partial_k x_j) = \delta_{ik}$ を証明しなさい．
- vi) (7.17) を確かめなさい.
- vii) ベクトル解析に現れる公式は, δ_{ij} , ε_{ijk} や 和の規約を使うと容易に証明できる．次にあげる公式を, δ_{ij} , ε_{ijk} や和の規約を使って証明しなさい.
 - a) ベクトル積に関する公式 $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$,
 - b) ベクトル三重積に関する公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

viii) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ を確かめなさい.

ix) 流体力学の Lagrange 微分に現れる移流項 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ は,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (7.20)$$

と書けることを証明しなさい. ここで \mathbf{v} は流体の速度場で, $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ は渦度と呼ばれる物理量である (上の関係式は Bernoulli の定理を証明するときに用いられる.)

x) $\nabla \times (S\mathbf{A}) = (\nabla S) \times \mathbf{A} + S(\nabla \times \mathbf{A})$ を和の規約を用いて証明しなさい.

xi) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ を和の規約を使って証明しなさい.

xii) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ を和の規約を使って証明しなさい.