

地球惑星科学基礎 III 演習 (11,12)

2003年12月19日, 2003年1月9日課題 (レポート提出期限1月16日)

1 Gamma関数の問題

Gamma関数とは

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (1)$$

で定義される関数である。ここで $n > 0$ である。Gamma関数に関する以下の性質を証明しなさい。

- i) $\Gamma(1) = 1$
- ii) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$
- iii) n が正の整数ならば $\Gamma(n) = n!$
- iv) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (ヒント: Gauss 積分を用いる.)

2 Laplace変換の問題

- i) a) $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ のとき, $\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$ を証明しなさい.
- b) $\mathcal{L}\{e^{-at} \sin bt\}$, ($a > 0$) を求めなさい.
- ii) 以下の微分方程式を Laplace 変換を用いて与えられた条件のもとで解きなさい.
 - a) $Y''(t) + 3Y'(t) + 2Y(t) = 0$; $Y(0) = 3, Y'(0) = 0$.
 - b) $Y''(t) - Y'(t) = t$; $Y(0) = 2, Y'(0) = -3$.

c) $Y''(t) + 2Y'(t) + 2Y(t) = 4; Y(0) = 0, Y'(0) = 0.$

iii) a) $L\{F(t)\} = f(s)$ のとき, $L\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^{(n)}(s)$ を証明しなさい. ただし $f^{(n)}(s) \equiv \frac{d^n}{ds^n} f(s), (n > 0)$ である.

b) $L\{x \cos x\}$ を求めなさい.

iv) $f(s) = L\{F(t)\}, g(s) = L\{G(t)\}$ のとき, $f(s)g(s) = L\{H(t)\}$, ここで,

$$H(t) = \int_0^t F(u)G(t-u) du, \quad (2)$$

を証明しなさい. (2) は F と G の畳み込み (convolution) と呼ばれる.

v) 以下の関数の Laplace 変換を求めなさい.

a) $\frac{1}{\sqrt{t}}$

b) $\cosh at$

c) $\frac{\sin t}{t}$