第 5 章

流体力学の基礎方程式の応用 (1)：静力学平衡

前章までに提示された流体力学の基礎方程式を用いて幾つかの現象を考察してみる. 先ずは, 重力場中で静止した流体の性質について考察する.

キーワード:　静水力平衡, 浮力, Archimedes の原理

5.1　大気の鉛直構造

本節では, 流体力学に基づいて地球大気の鉛直構造について考察してみる.

5.1.1　問題設定

以下のような問題設定を行う:

1. 物理量は水平方向には一様, 定常であり（x, y, t には依存しない）, 鉛直 1 次元問題で考える
2. 地球大気は非粘性流体
3. 地球大気に働く外力は重力のみである
4. 鉛直方向には静止した（もしくは, 鉛直速度が極めて小さく無視でき, さらに鉛直方向の加速度が, 運動方程式の鉛直成分の各項に比べて小さく無視できる）状態
5. 地球大気は理想気体の状態方程式に従う

と仮定する.

仮定 3 より地球大気に働く外力 $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{F} = -g\boldsymbol{k}$ である．ここで, g は定数でなく高度依存性があってもよい．そのような g の表現は

$$g = \frac{GM}{(a+z)^2} = g_0 \frac{a^2}{(a+z)^2}. \tag{5.1}$$

ここで, G は万有引力定数, M は地球の質量, a は地球の平均半径, z は平均海水面からの高度, g_0 は 地表 $z=0$ における重力加速度である.

5.1.2 大気圧の解釈

仮定 2, 3, 4 より, 運動方程式 (3.23) の z 成分は,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g \tag{5.2}$$

と書ける．この式は, **静水圧平衡の式**もしくは**静力学平衡の式**と呼ばれる．この式は気象学や地球流体力学における最も基本的なバランスの式の一つである.[*1]

ρ, g 共に正の量である事から, (5.2) が成り立つためには, $\partial p/\partial z < 0$ でなければいけない．すなわち, **重力場中では圧力（気圧）は高度と共に減少していく.**

さらに仮定 1 より, (5.2) は

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho\, g \tag{5.3}$$

となる.

(5.3) を高度 z から無限大まで積分する．ここで, $z \to \infty$ では大気は存在しない, すなわち $z \to \infty$，で $p=0$ とすると,

$$p(z) = \int_z^\infty \rho g \,\mathrm{d}z \tag{5.4}$$

が得られる．(5.4) は高度 z における大気圧は底面積 1 m^2 , 高さが $z \sim \infty$ の気柱の中にある空気の重さに等しいことを言い表している.

5.1.3 気圧の鉛直プロファイル

簡単化のために, さらに

[*1] このバランスは鉛直方向に関するものである．水平方向のバランスとして気象学や地球流体力学において基本的なものは, Coriolis 力と水平方向の気圧傾度力がバランスした地衡流平衡 (geostrophic balance) である.

1. 重力加速度は高さに依存しない定数 $g_0(=\frac{GM}{a^2})$ *2
2. 大気は等温（温度 T_0）である

と仮定する．このとき, 静水圧平衡の式 (5.3) と理想気体の状態方程式 (4.1) から

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g_0}{RT_0}\mathrm{d}z$$

が得られ, この式を高度 $0 \sim z$ まで積分して整理すると, 気圧の鉛直プロファイルを与える式

$$p(z) = p(0)\, e^{-z/H} \tag{5.5}$$

が得られる．ここで,

$$H \equiv \frac{RT_0}{g_0} \tag{5.6}$$

である．(5.5) は, 気圧は高度と共に指数関数的に減少していくことを示している．

図 5.1 と図 5.2 にそれぞれ 2005 年 8 月 30 日 9 時に神戸大学 自然科学総合研究棟 3 号館屋上から放球したラジオゾンデによって観測された気圧と気温の鉛直プロファイルを示す．上の考察を支持するように気圧は鉛直方向に指数関数的に減少していくことがわかる．実際の気温は鉛直方向には等温ではないが, 気圧の鉛直変化は指数関数的であり, 気圧の変化に比べると気温のそれは穏やかなので, 近似的に等温とみなすことができ, 考察の仮定が満足されているのである．また, (5.5) が成り立つ仮定である静水圧平衡は, 実際の大気では必ずしも満足されているわけではないが, 大気の状態は静水圧平衡から導かれる結果ともよく一致していることもわかる．

H はスケールハイト (scale hight) と呼ばれ, 気圧が e^{-1} になる高度であり, 大雑把に言うと大気の厚さを表す．地球を温度 255K*3 の等温大気と仮定するとスケールハイトは約 7 km である．

スケールハイトは鉛直方向の大気の質量分布の重心の位置と解釈することもできる．等温大気の場合には, 気圧の鉛直分布 (5.5) と同様に, 密度も

$$\rho(z) = \rho(0)e^{-z/H} \tag{5.7}$$

という鉛直プロファイルを持つ．鉛直方向の質量分布の重心 z_{G} は

$$z_{\mathrm{G}} \equiv \frac{\int_0^\infty z\rho(z)\,\mathrm{d}z}{\int_0^\infty \rho(z)\,\mathrm{d}z} \tag{5.8}$$

*2 我々が日常の経験する大気現象は高度約 15km よりも下層の対流圏で起こっている．地上の重力加速度に比べて, 高度 15km 上空における重力加速度は小さくなるが, その量は非常に僅かで 0.2% ほどである．そこで, ここでは重力加速度を定数として扱うことにする．

*3 放射平衡温度と呼ばれる．太陽からの入射エネルギーと地球から射出するエネルギーが等しいときの地球の表面温度である．

で計算される．実際に (5.8) に (5.7) を代入すると

$$z_{\mathrm{G}} = H \tag{5.9}$$

が得られる．

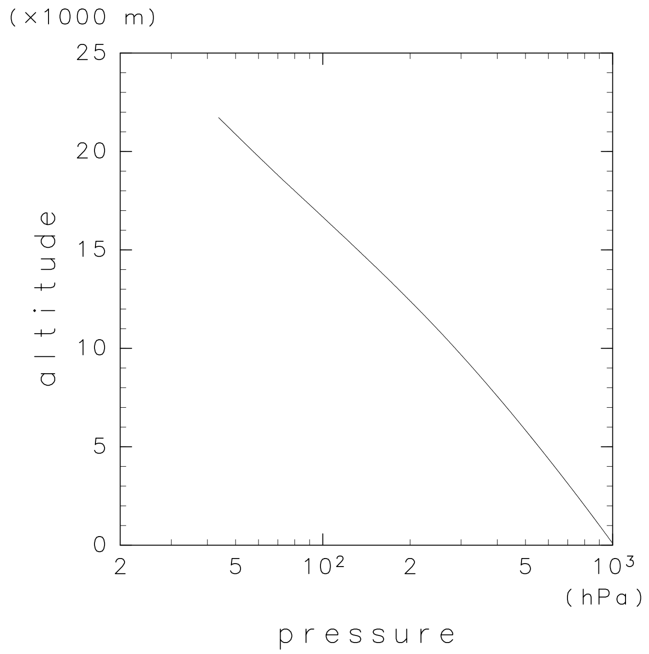

図 5.1　2005 年 8 月 30 日 9 時に神戸大学自然科学総合研究棟 3 号館屋上から放球したラジオゾンデによって観測された気圧の鉛直プロファイル．

5.2　浮力と Archimedes の原理

水に物体を沈めると, 物体が浮いたり物体の重さが水に沈める前よりも軽くなることが日常経験から知られており, これは浮力の効果によると言われている．理化学辞典[*4]によると浮力 (buoyancy) とは,

> 地球上 (一様な重力場中) では, 流体内にある物体にはその表面に作用する流体の圧力のため, 全体として上向きの力を受ける．これを浮力という．浮力の大きさと作用点とは, 物体の押し退けた流体の重さと重心とに一致する (アルキメデスの原理)

とある．実は, **浮力は鉛直方向の圧力傾度力であり, アルキメデスの原理は静水圧平衡の言い換えである**ことが以下のように示せる．

[*4] 第 4 版, 1987 年, 岩波書店

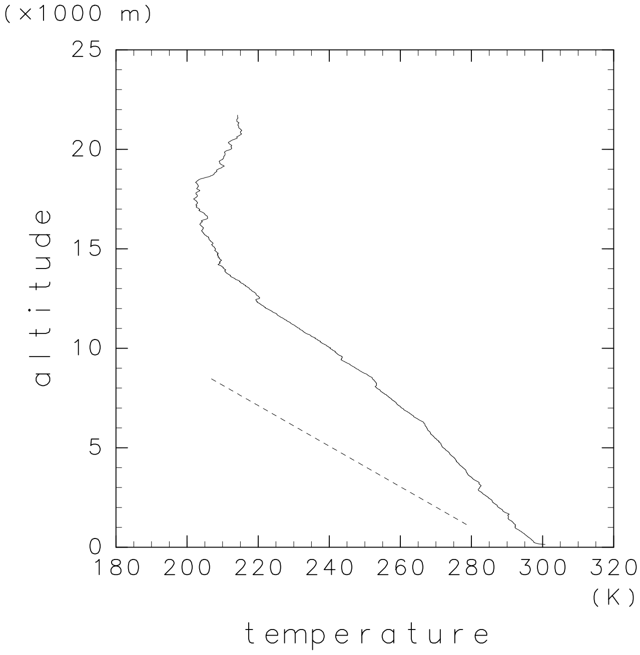

図 5.2　図 5.1 と同様. ただし, 気温のプロファイル. 点線は乾燥断熱減率に従う気温の変化を示している.

一様な重力場中（重力加速度 g が一定値 g_0）で一様な密度 ρ_0 を持つ流体の静止状態を考える. 図 5.3 で表される状況で, 注目する物体 (底面積 $\mathrm{d}S$, 厚さ $\mathrm{d}z$) に働く力を考える. 物体の上面には鉛直下向きに圧力 $p(z+\mathrm{d}z)$, 物体の下面には鉛直上向きに圧力 $p(z)$ が働いている. したがって, 物体に働く圧力に伴う正味の力は鉛直上向きを正として

$$\{p(z) - p(z+\mathrm{d}z)\}\,\mathrm{d}S \tag{5.10}$$

の力が働いている. 静止した流体中では圧力は高度と共に減少するので, $p(z) > p(z+\mathrm{d}z)$, したがって (5.10) は正の量である. (5.10) が上の文章で言うところの浮力である. さらに静水圧平衡の式 (5.3) を積分することにより

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S \int_z^{z+\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z &= -\mathrm{d}S \int_z^{z+\mathrm{d}z} \rho_0 g_0\,\mathrm{d}z, \\ \{p(z) - p(z+\mathrm{d}z)\}\,\mathrm{d}S &= \rho_0 g_0\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{5.11}$$

である. 浮力の大きさ（左辺）は物体が押しのけた流体の重さ（右辺）に等しいことがわかる. さらに, 右辺は体積力なのでそのの作用点は力が働いている物体の重心である. つまりアルキメデスの原理とは静力学平衡の式の言い換えであることがわかる.

演習問題

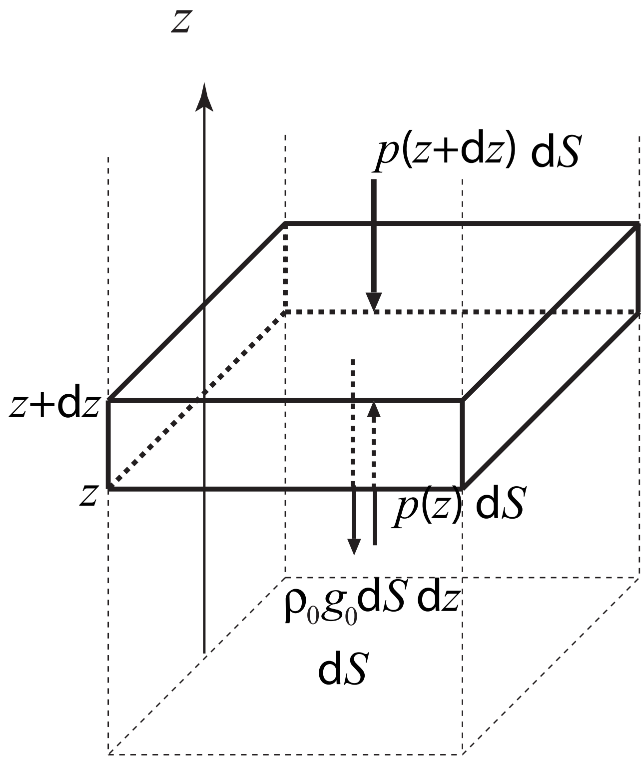

図 5.3　一様な重力場中において静止した流体中にある底面積 dS，高度 z と $z+\mathrm{d}z$ の間にある密度 ρ_0 の物体に働く力.

1. 　地上気圧が 1000 hPa のとき, 1 m^2 の上空にある空気の質量を求めなさい. ただし, 重力加速度は高度に依存せず一定値 $g = 10\,\mathrm{ms}^{-2}$ とする.
2. g, T が高さに依存性しないと仮定し, (5.3) から, (5.5) を導きなさい.
3. 重力加速度 g を定数と仮定する. 気温が高さとともに

$$T(z) = T_0 - \Gamma z \tag{5.12}$$

と一定の減率で減少するとき, 静水圧平衡の式, 理想気体の状態方程式を用いて気圧と高度との間の関係

$$p(z) = p(0)\left(1 - \frac{\Gamma}{T_0}z\right)^{g/(R\Gamma)} \tag{5.13}$$

を求めなさい. さらに, このような温度分布を持つ大気は有限の高さで終わる（有限の高度で気圧が 0 になる）ことを証明しなさい.