

第 7 章

流体力学の基礎方程式の応用 (3): 浅水系

7.1 はじめに：問題設定

浅い水 (浅水系) の表面にできる波を流体力学にしたがって記述する。流体力学の重要な応用である気象学や海洋学では、ここで議論する浅水系は大気・海洋の大規模な運動を記述し、理解するための重要な枠組みで、研究の現場でも頻繁に用いられる。地球に固定された座標系で大気や海洋の運動を眺め、記述することが観測との比較をするうえで便利である。しかしながら、そのような座標系は慣性系ではない。^{*1} ここでは、地球の自転の効果はとりあえず無視した議論を行うことにする。

地球の大気や海洋は水平方向の広がり比べてとても薄いことが知られている。地球は大円が 4 万 km の球であり、太平洋は 1 万 km ほどの幅を持つ。しかしながら、天気現象が起こる対流圏は地表からせいぜい高度 10km までの高度の領域であり、太平洋の平均の深さも約 4km ほどである。このように幾何学的に薄い流体層では、鉛直運動が起きにくくなる。そこで、大気や海洋の大規模運動では、鉛直方向には静水圧平衡がよい近似で成り立つ。また地球は自転しており、そのような自転している系の上では流れは自転軸方向に一樣になる傾向があることも知られている。^{*2} そこで、流れは鉛直方向には依存しない、という近似も課すことができる。

そこで、この節では以下の問題設定のもとでの流体運動を考察する。

1. 均質 (密度一様) で、非粘性の流体を考察する。

^{*1} 地球のように一定の速さで回転する座標系における運動方程式には、座標系の回転に伴い、コリオリの力と遠心力を更なる力として付け加える必要がある。

^{*2} Taylor–Proudman の定理と呼ばれる。

2. 外力は重力のみ.
3. 鉛直方向には静水圧平衡が成り立っている.
4. 物理量は, 水平方向の座標と時間に依存し, 鉛直座標には依存しない.
5. 流体は水平方向に無限遠方まで広がっており, 鉛直方向には次の図で示すように, 静止状態の深さを H , 自由表面変位の変動を $\eta(x, y, t)$ で表す.

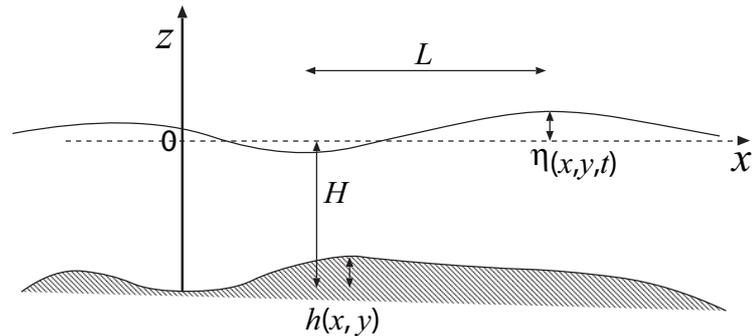


図 7.1 浅水系の概念図. 鉛直方向に z 軸, 水平方向 x, y 軸をとる. 流体が静止しているとき, 水面を $z = 0$ ととる. 静止状態の流体層の深さを H , 海底地形を $h(x, y)$, 自由表面変位を $\eta(x, y, t)$ ととることにする.

7.2 浅水方程式

前節で述べた問題設定のもと, 現象を記述する支配方程式系を導く. 議論の出発点は, 連続の式と運動方程式 (Euler 方程式) である.

7.2.1 連続の式

非圧縮性流体では, 流体の密度は運動に伴って変化しないので,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (7.1)$$

である. したがって, Lagrange 微分を用いて表現した連続の式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.2)$$

は, 速度の非発散の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.3)$$

もしくは,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.4)$$

となる.

(7.4) を z に関して, 下端 $z = -H + h$ から上端 $z = \eta$ まで積分する. この時, u, v は z 座標に依存しないことに注意すると,

$$\begin{aligned} \int_{-H+h}^{\eta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dz + \int_{-H+h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \\ (\eta + H - h) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + w|_{z=\eta} - w|_{z=-H+h} = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

となる. ここで, $w|_{z=\eta}$ は自由表面にある流体粒子の鉛直速度なので, その z 座標を Lagrange 微分したものに等しい:

$$\begin{aligned} w|_{z=\eta} &= \frac{D\eta}{Dt} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \eta. \end{aligned} \quad (7.6)$$

ここで, \mathbf{v}_h 水平流速ベクトル, $\nabla_h = \mathbf{i}\partial_x + \mathbf{j}\partial_y$ は水平座標に関する勾配演算子である. 同様に,

$$\begin{aligned} w|_{z=-H+h} &= \frac{D(h-H)}{Dt} \\ &= \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h h. \end{aligned} \quad (7.7)$$

(7.6), (7.7) を (7.5) に代入すると,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h (\eta - h) + (\eta + H - h) \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h = 0,$$

もしくは

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_h \cdot \{(\eta + H - h)\mathbf{v}_h\} = 0, \quad (7.8)$$

を得る. (7.8) が今の問題設定での連続の式となる.

7.2.2 運動方程式

静水圧平衡の式

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (7.9)$$

を z に関して, z から上端 $z = \eta$ まで積分する. この時, ρ は定数であることに注意すると,

$$p|_{z=\eta} - p|_z = -\rho g(\eta - z). \quad (7.10)$$

ここで, 自由表面での圧力を p_0 (これは海面上での大気圧に相当するがとりあえずこれを一定) とする. したがって, 圧力は

$$p = \rho g(\eta - z) + p_0 \quad (7.11)$$

と表現できる.

運動方程式 (Euler 方程式) の水平成分,

$$\frac{D\mathbf{v}_h}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_h p, \quad (7.12)$$

に (7.11) を代入すると,

$$\frac{D\mathbf{v}_h}{Dt} = -g \nabla_h \eta, \quad (7.13)$$

または,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \mathbf{v}_h = -g \nabla_h \eta, \quad (7.14)$$

を得る.

(7.8), (7.14) は未知変数 \mathbf{v}_h, η に対する方程式で, 未知変数が3個なのに対し, 方程式が3本あり, 閉じた方程式系になっている. これらの方程式系は, 浅水方程式系と呼ばれるものである.

7.3 重力波

自由表面が静止状態から乱されたとき, その乱れが波動となって位相速度 $c = \sqrt{gH}$ で伝播することを示す.

7.3.1 線形化

浅水方程式 (7.8), (7.14) は非線型方程式なので, そのままでは理論的な解析は困難である. そこで, 音波のときと同様に支配方程式系を線形化する.

底面は平坦 ($h = 0$) で, 静止状態を基本状態とする. 静止状態からの乱れを考察する. 乱れは十分に小さく, 未知変数の2次以上の項は無視することにする. このとき, 浅水方

程式 (7.8), (7.14) は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \nabla_{\text{h}} \cdot \mathbf{v}_{\text{h}} = 0, \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\text{h}}}{\partial t} = -g \nabla_{\text{h}} \eta, \quad (7.16)$$

となる.

7.3.2 波動方程式

(7.15), (7.16) から波動方程式を導く. (7.15) を時間で偏微分する:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + H \nabla_{\text{h}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{h}}}{\partial t} = 0. \quad (7.17)$$

(7.17) の速度の時間微分を (7.16) を使って消去し, η のみの式に書き下すと,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g H \nabla_{\text{h}}^2 \eta \quad (7.18)$$

を得る. これは, 波動方程式の形で, その位相速度は $c = \sqrt{gH}$ である. 即ち, 浅水方程式系には, 表面を位相速度 $c = \sqrt{gH}$ で伝播する波動が存在することになる. このような波動は重力を復元力として伝播する波動なので, 表面重力波 (surface gravity wave) と呼ばれている.

ここで議論した地球回転の効果が無視でき, しかも水平の現象の規模が水深に比べて非常に大きい浅水近似がよく成り立つ現象は津波である. 水深 $H = 1,000 \text{ m}$ のとき, 位相速度は 360 km/h , 水深 $H = 4,000 \text{ m}$ で $c = 710 \text{ km/h}$ である. そこで, 平均水深 4000 m の太平洋 (幅約 $10,000 \text{ km}$) を横断するのはわずか 14 時間ほどになる.*³

*³ 実際に起こったチリ地震 (1960 年) の津波は, 日本の太平洋沿岸に達するのに約 1 日であったので, 上記の理論的見積もりよりは倍の時間がかかっていることになるが, 現象の予測の桁はあっているといえる.