

Lagrange 微分と体積積分の順序の交換に関する ノート

岩山隆寛

2013 年 1 月 10 日配布

1 本稿の目的

「エネルギー保存則に関するノート」で出題した課題 3 の解答に, 共通する誤り (?) が見受けられたのでここで解説をしておく.

2 Lagrange 微分と積分の順序の交換について

単位質量あたりの内部エネルギーを $\mathcal{U}$, 圧力を p , 速度を $\mathbf{v}$, 単位時間・単位質量当たりの加熱を J としたときに, 熱力学的エネルギー方程式は,

$$\rho \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \rho J \quad (1)$$

である (「エネルギー保存則に関するノート」(14) 式参照). (1) を流体の存在する領域に渡って体積積分する:

$$\int_V \rho \frac{D\mathcal{U}}{Dt} dV = - \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \rho J dV. \quad (2)$$

多くの人が (2) の左辺をただちに,

$$\int_V \rho \frac{D\mathcal{U}}{Dt} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathcal{U} dV \quad (3)$$

としていた. (3) はもちろん正しいのだが, 実は次のような計算が潜んでいるのである. 気づいたでしょうか?

3 詳細な計算

まず, 境界条件として無限遠方で適当な減衰条件 $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{v} = 0$ が課されている, もしくは流体が固体壁で囲まれている場合を想定していることに注意しておく (「エネルギー保存則に関するノート」の (7) 式の下に記述あり).

次に, Lagrange 微分の定義に従うと,

$$\rho \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U}, \quad (4)$$

である. ここで, 上式の右辺第 1 項において密度 ρ を時間微分の中に押し込む. 同様に, 第 2 項で $\rho \mathbf{v}$ を勾配演算子の中に押し込む. 密度は定数ではなく, 時間, 空間の関数 (場の変数) であることにも注意する. 密度は質点系の力学の質量に対応するので, 定数のように思われるかもしれないが, 連続体の場合には密度も場の変数でその空間分布や時間変動も予測の対象となっている. 密度を微分演算の中に押し込むとき, お釣りの項が出てきて,

$$\rho \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial t} - \mathcal{U} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{U} \mathbf{v}) - \mathcal{U} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (5)$$

となる. ここで連続の式,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6)$$

を考慮するとお釣りの項はゼロとなる. したがって,

$$\rho \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{U} \mathbf{v}). \quad (7)$$

(7) を (3) の被積分関数に代入して

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{D\mathcal{U}}{Dt} dV &= \int_V \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathcal{U} \mathbf{v}) dV \\ &= \int_V \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial t} dV + \int_{\partial V} (\rho \mathcal{U} \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathcal{U} dV \end{aligned} \quad (8)$$

を得る. ここで, 第 1 式から第 2 式への変形には Gauss の発散定理を用いた. また第 2 式から第 3 式への変形には, 先に設定した境界条件から, 第 2 項の面積積分はゼロとなるこ

とを用いている。さらに、第 1 項は時間微分と空間積分は独立な演算なので、順序を交換できる。^{*1}ここで、 A を時間と空間の関数としたとき、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V A \, dV = \frac{d}{dt} \int_V A \, dV \quad (9)$$

を用いている。(9) のココロは、 A の体積積分はもはや空間の変数に対する依存性はなく、時間のみの関数になっている。そこで A の体積積分を時間で偏微分することは、 A の積分を「常微分」することと同等である。

4 まとめ

以上のような論理が、(3) の＝には隠れています。それが理解できていましたよね？（というか、これをサラリと書いてしまわずに、上記のようにキチンと論理展開することが課題 3 の主題でした。）

^{*1} 同じ変数の微分と積分は単純には交換できない。