第 1 章

序論〜これまでの復習〜

流体の運動を支配する物理法則は, 質点や剛体の力学でおなじみの Newton の運動の法則である．しかしながら, 質点や剛体は変形しないのに対して, 流体は変形することが本質である．そこで, 流体力学には今まで習ってきた力学と, ある部分では共通の概念を適用することができるが, また別の面では新たな概念が必要である．本章では, 流体力学で登場する新たな概念の中で, これまでに習ってきたものについて簡単に復習しておく.

1.1 連続体の概念

すべての物質は原子や分子などの粒子より構成されるが, そのような微細構造に立ち入らず, 微細構造を平均化し物理量が, 空間・時間の連続関数として与えられる仮想的な物体を取り扱うのが流体力学の立場である．このような仮想的な物体は, **連続体**とよばれ, 実在の物質を連続体とみなす近似は**連続体近似**と呼ばれる．古典力学では物体を, 有限の質量を持つが大きさを持たない**質点**や有限の大きさと質量を持つが変形しない**剛体**と理想化して物理現象を記述する．連続体近似という理想化は, このような古典力学における質点や剛体といった理想化に対応するものである.

1.1.1 連続体近似の方法

連続体近似は, 物体内部のある点 P における物理量の値を, P を含む微小体積 δV (ただし, 多数の原子や分子を含む) について, その物理量の平均値をもって定義することにより実現される．また, 時間についても多数の原子や分子の衝突が充分に行われるが, 微小時間 δt に渡って物理量を平均する．このような操作を物体内のあらゆる点, あらゆる時刻で行うことにより, その物理量は空間・空間の連続関数, 即ち, 場の量となる.

1.1.2　流体粒子

流体力学ではしばしば**流体粒子** (fluid parcel または fluid particle) という言葉が登場する．これは, 流体を構成している原子・分子などの粒子を言い表しているのではなく, 前節で述べた δV 程度の大きさをもった流体の微小な塊のことである．すなわち, 流体粒子の中には無数の原子・分子が含まれているが, 流体粒子は考察の対象とする現象に比べて極めて小さく, 点とみなすことができるような流体の一部分のことである．流体力学では, このような流体粒子に働く力を調べ, その運動を記述する運動方程式を立て, その解を調べることにより, 流体の運動を考察するのである．流体粒子は自由に変形するが常に同じ大きさの質量も持っていると仮定する．

1.2　応力

古典力学では, Newton の第二法則より, “ 考察する物体に働く力の総和はその物体の運動量の時間変化率に等しい ”, として運動方程式をたてる．さらに, その方程式を解くことにより物体の運動状態を調べることができる．流体力学でも同様に “ 流体粒子に働く力の総和が, 流体粒子の運動量の時間変化率に等しい ” として運動方程式を立て, それを適当な条件（境界条件, 初期条件）のもとで解き, 流体の運動を考察する．ここでは流体に限らず広く連続体[*1]に働く力について考えてみる．

1.2.1　体積力, 面積力

連続体に働く力には次の二種類がある．

- **体積力** (body force)：その大きさが物質の質量や体積に比例する力．重力, 遠心力, Coliois 力などがその例であり, 質点の力学でもおなじみのものである．
- **面積力** (surface force)：面を通して作用し, その大きさが面の大きさに比例する力．この力は, 物質を構成する原子の相互作用に由来するもので, 力の及ぶ範囲は要素の表面の極く薄い層に限られる．これは**連続体特有の力**である．

単位面積あたりに働く面積力を**応力** (stress) と呼ぶ．これは MKS 単位系では Nm^{-2} の次元を持つ．“力” という言葉がついているが, その次元は力の次元 N ではないことに注意して欲しい．

[*1] 流体以外の連続体の代表的なものは弾性体である．

1.2.2　応力の定義

連続体中の点 P における応力は, 点 P を通る平面 S を選び, S 上の P を含む単位面積を通して両側の連続体が及ぼしあう力 (法線 $\boldsymbol{n}$ の正の側から負の側へ及ぼす力) で定義し, $\boldsymbol{T_n}$ と表す．したがって $\boldsymbol{T_n}$ は S の選び方, すなわち法線 $\boldsymbol{n}$ に依存する．また, 力はベクトル量であるから大きさと方向を持つ．したがって $\boldsymbol{T_n}$ は 2 つの方向と 1 つの大きさによって定まる．これは, 数学的には 2 階の**テンソル** (tensor) と呼ばれ, 9 個の成分, $\tau_{ij}, (i, j = x,\ y,\ z$ もしくは $1, 2, 3)$, を持つ量である.[*2] τ_{ij} は**応力テンソル**と呼ばれる.

応力テンソルは, x_j 軸に垂直な平面を通して, x_j 軸の大きい側から小さい側へ作用する x_i 方向の力を τ_{ij} と定義する.（例えば, x 軸に垂直な平面を通して, x の大きい側から小さい側へと作用する y 方向の応力は τ_{yx} または τ_{21} と書かれる.）

作用・反作用の法則を考えると,

$$\boldsymbol{T_{-n}} = -\boldsymbol{T_n}, \qquad (\text{成分表示では}, \tau_{i(-j)} = -\tau_{ij}) \tag{1.1}$$

の関係がある.

応力を面の接線方向の成分と法線方向の成分に分解し, それぞれを**接線応力** (tangential stress), または**せん断応力** (shear stress), **法線応力** (normal stress) と呼ぶ．法線応力は, 面の両側が押しあう場合は**圧力** (pressure), 引っ張りあう場合は**張力** (tension) となる.

1.2.3　和の規約

ベクトルやテンソルの表記には, しばしば和の規約（もしくは総和規則）と呼ばれる表記法が使われる．これは, デカルト座標系の x, y, z 成分をそれぞれ添え字 1, 2, 3 で表し, 一つの項の中に同じアルファベットの添え字が 2 度繰り返し用いられているときには, その添え字について 1 から 3 までの和をとる, という規則である.[*3]

1.3　流れの記述

流体の運動を記述する方法には, 二通りの方法があり, それぞれの方法に時間微分が定義できる．ここではこれら二つの記述法と二つの時間微分について解説する.

[*2] 添え字 1, 2, 3 はそれぞれデカルト座標系の x, y, z 成分を表す.

[*3] より詳しくは, 地球惑星科学基礎 III のノートを参照してください.

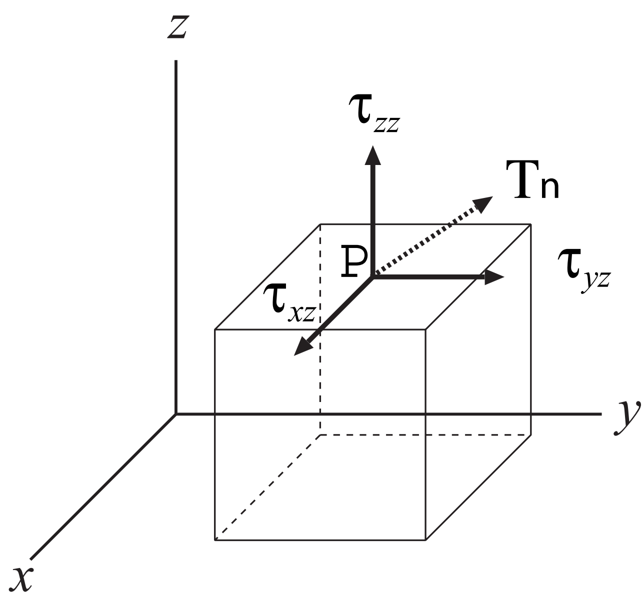

図 1.1　点 P を通る z 軸に垂直な平面を考える．このとき, P に働く応力 $\boldsymbol{T_n}$ は平面に水平な成分 τ_{xz}, τ_{yz} と垂直な成分 τ_{zz} に分解できる．

1.3.1　Lagrange **の方法** (Lagrange **的記述**)

この方法では, 流体を無数の流体粒子の集団と見なし, 各粒子の運動を追跡することにより流体の運動を記述する．この記述方法は質点系の力学における質点系の記述と非常によい対応関係がある．たとえば N 個の質点系の運動を考えたときに, 質点系の力学では i 番目 $(i = 1, 2, \ldots N)$ の質点の任意の時刻 t における位置 $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ を問題にする．ここで i は粒子の名前 (粒子の識別子) である．一方, 流体粒子の識別には, ある時刻における流体粒子の位置を用いる．ある時刻における空間の一点に存在する流体粒子は唯一であるために, これを持ってして流体粒子を識別することができるからである．通常は初期時刻 ($t = 0$) の位置が用いられる．$t = 0$ において空間中の $\boldsymbol{a} \equiv (a,\, b,\, c)$ という位置に存在していた流体粒子の名前を $\boldsymbol{a}$ もしくは $(a,\, b,\, c)$ と名付ける．(a, b, c) は**物質座標**（material coorinates）と呼ばれる．

質点系と流体系の大きな違いは次の 2 点である．

- 質点の名前 i は離散的量であるが, 流体粒子の名前 $\boldsymbol{a}$ は連続的量である．
- 質点系の場合には各質点はバラバラに運動をする．一方流体の運動では, 流体は連続体であるから隣り合う流体粒子 (近い名前の流体粒子) は互いに似た運動をする．

	流体力学 (Lagrange 的記述)	古典力学 (質点系)
粒子の識別子	物質座標 $\boldsymbol{a} \equiv (a, b, c)$：連続的量	i：離散的量
物理量, 例えば速度	$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}, t)$	$\boldsymbol{v}_i(t)$
時間微分	$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{a}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

表 1.1　流体力学における Lagrange 的記述と質点系の力学との対応関係.

Lagrange 微分

各流体粒子に付随した物理量の時間的変化率, 時間微分, を **Lagrange 微分**（または物質微分, material differentiation）と呼び

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$$

で表す.[*4] Lagrange の方法では, 物理量 $F(\boldsymbol{a}, t)$ ($\boldsymbol{a}$ という流体粒子が持っている物理量. 例えば, 速度や温度, 圧力など) の Lagrange 微分は

$$\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{a}} \tag{1.2}$$

と表せる. これは古典力学でいうところの $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ に対応するものである.

以上をまとめると, 表 1.1 のようになる.

例

流体粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の Lagrange 微分は, その流体粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ である. 即ち, $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{r}}{\mathrm{D}t}$ となる. また, 速度の時間変化率 $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}$ は加速度である.

1.3.2　Euler の方法 (Euler 的記述)

Lagrange 的記述は質点系の力学とよい対応関係にあるので, 質点系の力学の知識を適用できるという利点がある. しかしながら, この記述法は実用的ではない. 例えば, 大気現象を想像してみよう. 我々の興味の対象はある日時における, ある場所の気温であったり気圧や風向・風速, 天気であろう. しかしながら, Lagrange の方法が与えるのは, ある日時に適当な場所にあった流体粒子が, のちの時刻にどこに行き, どのような性質（温度, 圧力, 速さ) をもつか, である. 多くの場合, より実用的な記述法が Euler 的記述である.[*5]

[*4] 教科書によっては, Lagrange 微分を $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ と表しているものもある.
[*5] 原子力発電所を発生源とした放射性物質が, いつ, どこに, どのくらいの濃度でやってくるか, といったことを問題にする場合には Lagrange 的記述が有効である.

この方法では任意の時刻 t において, 空間の各点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で物理量を指定することによって流体の運動を記述する．すなわち, 場の立場である．物理学において, 場の立場で現象を記述する代表的分野として, 電磁気学があげられる．電磁気学と流体力学ではしばしば同じ方程式が登場する．歴史的には電磁気学よりも先に流体力学が学問的に体系化されており, 流体力学の学問体系を参考にして電磁気学が体系化されたといわれている．

Euler 的記述と Lagrange 的記述の大きく異なる点は, 変数 x, y, z が Lagrange 的記述では従属変数 (物質座標と時間に依存する変数) なのに対し, Euler 的記述では独立変数であることである．

1.3.3　Lagrange **微分の** Euler **的表現**

流体粒子に付随したある物理量 F の Euler 的表記は $F(x, y, z, t)$ である．この量の Lagrange 微分を Euler 的方法で記述することを考える．ある時刻 t で $\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, z)$ にあった流体粒子が, 時刻 $t + \Delta t$ において $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\Delta t = (x + u\Delta t,\, y + v\Delta t,\, z + w\Delta t)$ に移動したとする．このとき流体粒子に付随した F の変化 ΔF は,

$$
\begin{aligned}
\Delta F &= F(x + u\Delta t,\, y + v\Delta t,\, z + w\Delta t,\, t + \Delta t) - F(x,\, y,\, z,\, t) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u\,\frac{\partial F}{\partial x} + v\,\frac{\partial F}{\partial y} + w\,\frac{\partial F}{\partial z} \right) \Delta t + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 \right), \\
\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} &= \lim_{t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\,\frac{\partial F}{\partial x} + v\,\frac{\partial F}{\partial y} + w\,\frac{\partial F}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

と計算される．ここで $\mathcal{O}\left((\Delta t)^2\right)$ は Δt の二次以上の項を表す．F は任意であるから, Lagrange 微分の Euler 的表現として

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial x} + v\,\frac{\partial}{\partial y} + w\,\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

を得る．

注意：　(1.4) の第 2 の表現に特に注意して欲しい．$\boldsymbol{v} \cdot \nabla$ は決して $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ とは等しくない！ ∇ は演算子であるから演算の順序を入れ換えては意味が違ってくる．例年, 両者の区別ができない人が非常に多い．$\boldsymbol{v} \cdot \nabla$ は演算子で, 何か関数に食いついて初めて数値をとりえる (つまり $\boldsymbol{v} \cdot \nabla$ は**飢えている**) のに対し, $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ はそれ自身で明確な数値を持ちえる．

以下に 2 つの記述を表にしてまとめておく．

	Langrange の方法	Euler の方法
立場	粒子的	場
独立変数	$\boldsymbol{a}=(a,b,c),t$	$\boldsymbol{r}=(x,y,z),t$
従属変数	$\boldsymbol{r};p,\rho,T,...$	$\boldsymbol{v}=(u,v,w);p,\rho,T,...$
Lagrange 微分, $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{a}}$	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla$

(1.4) の右辺第 1 項は非定常項, $\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ の項は**移流項**と呼ばれる．以下の例題は, 移流という言葉の意味と移流項の作用を理解するのに適当であろう．

例題

ある観測所の 50km 北の地点では観測所よりも 3.0 K 気温が低いとする．もし $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ の北風が吹いていて, 空気塊の温度は変化しないものとする．このとき, 観測所における気温の時間変化率は以下のように求められる．

温度 T の Lagrange 微分は Euler 的な微分によって,

$$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T$$

と表現できる．ここで, $\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$ が空気塊の温度変化率であり, $\frac{\partial T}{\partial t}$ が観測地点における温度変化率である．いま, 問題より $\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=0$ なので, 観測地点における温度変化率は

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T$$

と温度移流で決まる．北向きを y-座標の正の向きとすると北風は $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{j}$, $v=-10\,\mathrm{m/s^2}$ と表現できる．一方, 温度勾配は北に行くほど温度が下がるので, $\boldsymbol{\nabla}T=\frac{\partial T}{\partial y}\boldsymbol{j}$, $\frac{\partial T}{\partial y}=-3\,\mathrm{K}/50\,\mathrm{km}$ である．したがって

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T=-6.0\times10^{-4}\,\mathrm{K/s}=-2.2\,\mathrm{K/h}$$

北半球に住んでいる我々にとって, 一般に北に行くほど温度は下がっており, 日常経験によると,「北風が吹くと冷たいもしくは寒い」, のであるが, 上の例はそのような状況をまさに表現している．

演習問題:

1. ある三変数関数 $f(a,b,c)$ があったとき, 偏微分は $\partial f/\partial a$ とは, 独立変数 b,c を一定とおき, 独立変数 a で f を偏微分するという意味である．一定とおく独立変数を添え字として明示的に $(\partial f/\partial a)_{b,c}$ と示すほうが, より親切な表記であるが, 独立変数の組がよくわかっている場合には, しばしば一定とおく変数を省略してしまう．このことをふまえて, Lagrange 的記述における $\partial/\partial t$ と Euler 的記述における $\partial/\partial t$ ではそれぞれ何を一定として偏微分を行っているかを述べなさい．
2. Lagrange 微分の Euler 的表現 (1.4) で登場した $\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ を和の規約を使って表しな

さい.

3. 地表気圧が東方向に行くにしたがって 0.3 kPa/180 km で減少しているとする. 東向きに 10 km/h で航行する船の上で気圧を測ったところ 0.1kPa/3 h であった. この海域に島が存在するとし, 島の上で気圧を測ったときの気圧の時間変化率を以下の手順に従って求めなさい. *6
   (a) x を東方向, x 方向の船の速度を u としたときに $\boldsymbol{v} \cdot \nabla p$ はどのように表現されるか.
   (b) 以上の考察から島の上で観測された気圧変化率を求めなさい.
4. 地表気圧が北東方向に行くにしたがって 5 Pa km^{-1} で増加しているとする. 北東向きに 10 km h^{-1} で航行する船の上で気圧を測ったところ変化率は 100Pa/3 h であった. この海域に島が存在するとしたときに, 島の上で観測された気圧の時間変化率を求めなさい.
5. ある観測所の 50km 北の地点では観測所よりも 3 K 気温が低いとする. もし 20m s^{-1} の北東風が吹いていて, 空気塊は放射によって 1 K h^{-1} で温まっているとき, 観測所における気温の時間変化率を求めなさい.