地球流体力学演習問題第６章

1. (6.12) 式から (6.13) 式の導出.

　(6.12) 式の熱力学第１法則は

$$\frac{c_v}{p}\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}-\frac{c_p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0$$

で与えられる．ここで，ある物理量 f を基本状態 f_0 と擾乱 f' の線形結合で表すと，

$$f=f_0+f' \qquad (\frac{f'}{f_0}\ll 1)$$

となる．このとき，次のようなラグランジュ微分をオイラー微分で書き換えると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{f}\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t}=&\frac{1}{f_0+f'}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(f_0+f'\right)\\=&\frac{1}{f_0}\left(1+\frac{f'}{f_0}\right)^{-1}\frac{\mathrm{D}f'}{\mathrm{D}t}\\=&\frac{1}{f_0}\left(1+\frac{f'}{f_0}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f'}{\partial t}+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}f'\right)\end{aligned}$$

となる．ここで，$\dfrac{f'}{f_0}\ll 1$ であることから

$$=\frac{1}{f_0}\left(1-\frac{f'}{f_0}+\mathcal{O}\left((\tfrac{f'}{f_0})^2\right)\right)\left(\frac{\partial f'}{\partial t}+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}f'\right)$$

とすると，方程式の線形化より，

$$\approx\frac{1}{f_0}\left(\frac{\partial f'}{\partial t}\right)$$

とできる．したがって，(6.12) 式の線形化した方程式は，

$$\frac{c_v}{p_0}\frac{\partial p'}{\partial t}-\frac{c_p}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial t}=0$$

となり，(6.13) 式に一致する．

＜別解＞

　上で求めた (6.13) 式は p' と ρ' を関係付ける式である．これと同様に，(6.14) 式のような対応関係も求められる．圧力を密度とエントロピーの関数と考え，断熱過程における圧力の微小変化 p_0+p' をテイラー展開によって求めるのである．ただし，断熱過程なので，エントロピーは変化しない．すると，

$$\begin{aligned}p'=&p(\rho_0+\rho',S_0)-p_0(\rho_0,S_0)\\\approx&\left\{p(\rho,S_0)|_{\rho=\rho_0}+\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=\rho_0}\rho'\right\}-p_0(\rho_0,S_0)\end{aligned}$$

ここで，$p(\rho_0, S_0) = p_0$ なので，

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ p_0(\rho_0, S_0) + \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right) \rho' \right\} - p_0(\rho_0, S_0) \\
&= \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right) \rho'
\end{aligned}
$$

となり，圧力と密度の関係が得られる．

2. 次の３つの方程式：

$$
\begin{aligned}
(6.9) &= \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} p' \\
(6.10) &= \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}' = 0 \\
(6.13) &= \frac{c_v}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{c_p}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0
\end{aligned}
$$

が線形微分方程式であることを確認する．

上の３つの方程式系を満足する２つの解の組が以下のように得られたとする．

$$
(\dagger 1) = (\boldsymbol{v}'_1,\ p'_1,\ \rho'_1), \quad (\dagger 2) = (\boldsymbol{v}'_2,\ p'_2,\ \rho'_2)
$$

ここで，$(\dagger 1), (\dagger 2)$ はそれぞれの解の組を表す番号とする．このとき，上の２つの解を定数倍して線形結合した次のようなものも方程式系を満足することを示す．

$$
(c_1 \boldsymbol{v}'_1 + c_2 \boldsymbol{v}'_2,\ c_1 p'_1 + c_2 p'_2,\ c_1 \rho'_1 + c_2 \rho'_2)
$$

この解の組を上の方程式系に代入すると，

$$
\begin{aligned}
(6.9)\ :\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(c_1 \boldsymbol{v}'_1 + c_2 \boldsymbol{v}'_2 \right) = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} \left(c_1 p'_1 + c_2 p'_2 \right) \\
\Rightarrow \quad & \underbrace{c_1 \frac{\partial \boldsymbol{v}'_1}{\partial t}}_{\dagger 1} + \underbrace{c_2 \frac{\partial \boldsymbol{v}'_2}{\partial t}}_{\dagger 2} = \underbrace{-c_1 \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} p'_1}_{\dagger 1} \underbrace{-c_2 \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} p'_2}_{\dagger 2}
\end{aligned}
$$

この２つの組がそれぞれ (6.9) 式の微分方程式の解となり，それらが線形結合で表されるので，(6.9) 式は線形方程式である．同様に，(6.10) 式は

$$
\begin{aligned}
(6.10)\ :\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(c_1 \rho'_1 + c_2 \rho'_2 \right) + \rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(c_1 \boldsymbol{v}'_1 + c_2 \boldsymbol{v}'_2 \right) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \underbrace{c_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial t}}_{\dagger 1} + \underbrace{c_2 \frac{\partial \rho'_2}{\partial t} \rho'_2}_{\dagger 2} + \underbrace{c_1 \rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}'_1}_{\dagger 1} + \underbrace{c_2 \rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}'_2}_{\dagger 2} = 0
\end{aligned}
$$

より，線形方程式である．最後に，(6.13) 式は

$$
\begin{aligned}
(6.13)\ :\ & \frac{c_v}{p_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(c_1 p'_1 + c_2 p'_2 \right) - \frac{c_p}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(c_1 \rho'_1 + c_2 \rho'_2 \right) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \underbrace{c_1 \frac{c_v}{p_0} \frac{\partial p'_1}{\partial t}}_{\dagger 1} + \underbrace{c_2 \frac{c_v}{p_0} \frac{\partial p'_2}{\partial t}}_{\dagger 2} \underbrace{-c_1 \frac{c_p}{\rho_0} \frac{\partial \rho'_1}{\partial t}}_{\dagger 1} \underbrace{-c_2 \frac{c_p}{\rho_0} \frac{\partial \rho'_2}{\partial t}}_{\dagger 2} = 0
\end{aligned}
$$

となり，線形方程式である．以上より，線形化した流体の支配方程式系は線形方程式系であることがわかる．

3. 波動方程式 (6.17) の平面波解における分散関係の導出.
   まず，p', ρ', $\boldsymbol{v}'$ の波動方程式の解として

$$
\begin{aligned}
(6.21)\ &:\ p' = \mathrm{Re}\left[\hat{p}\exp\left\{i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t\right)\right\}\right] = \mathrm{Re}\left[\hat{p}\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\}\right] \\
(6.22)\ &:\ \rho' = \mathrm{Re}\left[\hat{\rho}\exp\left\{i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t\right)\right\}\right] = \mathrm{Re}\left[\hat{\rho}\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\}\right] \\
(6.23)\ &:\ \boldsymbol{v}' = \mathrm{Re}\left[\hat{\boldsymbol{v}}\exp\left\{i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t\right)\right\}\right] = \mathrm{Re}\left[\hat{v}_i\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\}\right]
\end{aligned}
$$

という平面波解を仮定する（ただし，ベクトルの計算には和の規約を用いた）．このとき，$\boldsymbol{v}'$, p' の関係を表す (6.15) 式

$$
\frac{\partial^2 v_i'}{\partial t\partial x_i} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2}
$$

（和の規約を用いて表している）に上の解を代入すると，

$$
\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_i}\hat{v}_i\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\hat{p}\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\} \tag{10}
$$

となる．ここで，$\hat{v}_i, \hat{p}$ は定数であることを考慮して，実際に微分すると左右辺はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺微分}) =& \frac{\partial^2}{\partial t\partial x_i}\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\} \\
=& \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\} \\
=& ik_j\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\} \\
=& (ik_j\delta_{ij})(-i\omega)\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\} \\
=& k_i\omega\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\}
\end{aligned}
$$

同様に，

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺微分}) =& -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\} \\
=& (ik_j\delta_{ij})^2\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\} \\
=& -k_i^2\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\}
\end{aligned}
$$

なので，(10) 式は

$$
\hat{v}_i k_i\omega\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\} = \frac{\hat{p}}{\rho_0}k_i^2\exp\left\{i\left(k_j x_j-\omega t\right)\right\}
$$

$$
\Rightarrow\quad \hat{v}_i k_i\omega = \frac{\hat{p}}{\rho_0}k_i^2
$$

したがって，

$$\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}\omega = \frac{\hat{p}}{\rho_0}\boldsymbol{k}^2$$

ここで，波数ベクトルの 3 成分は $\boldsymbol{k}=(k,l,m)$ であるため，

$$\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}\omega = \frac{\hat{p}}{\rho_0}\left(k^2+l^2+m^2\right)$$

という分散関係が得られる．同様に，(6.16) 式

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2}$$

に，解を代入すると，

$$(-i\omega)^2\hat{\rho} = (ik_j\delta_{ij})^2\hat{p}$$

となるので，

$$c_s^2\hat{\rho} = \hat{p} \qquad\qquad (c_s^2 = \frac{\omega^2}{\boldsymbol{k}^2})$$

である．ここで，c_s は位相速度を表す．さらに，(6.17) の波動方程式に上の解を代入すると，

$$\begin{aligned} (6.17)\ :\ \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= c_s^2\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} \\ \Rightarrow\quad (-i\omega)^2\hat{p} &= c_s^2(ik_j\delta_{ij})^2\hat{p} \end{aligned}$$

したがって，

$$\omega^2 = c_s^2\left(k^2+l^2+m^2\right)$$

である．以上より，分散関係に関する式 (6.24),(6.25),(6.26) が得られた．

4. 音波と圧縮性

　考察する流体が非圧縮性流体である場合，連続の式より，発散はゼロである．つまり，

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_i} = 0$$

である．ここで，(6.15) 式：

$$\frac{\partial^2 v_i'}{\partial t\partial x_i} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2}$$

に上の条件を代入すると，左辺がゼロとなり，

$$0 = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2}$$

という圧力に関する式が得られる．ここで，平面波解を仮定して，p' にその解 (6.21) 式を代入すると，上式は

$$0 = \frac{\hat{p}}{\rho_0}(k_j\delta_{ij})^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\hat{p}}{\rho_0}\left(k^2 + l^2 + m^2\right) = 0$$

となる．$\hat{p}$, ρ_0 はゼロでないので，結果として

$$k^2 + l^2 + m^2 = 0$$

という条件が得られる．音波の分散関係式は (6.29) 式の 5 次正方行列の行列式をゼロとして計算した結果（つまり，(6.30) 式）で与えられているので，これに上の波数の条件式を代入すると，

$$(6.30)\ :\ \omega^3\left\{\omega^2 - \frac{p_0}{\rho_0}\gamma\left(k^2 + l^2 + m^2\right)\right\} = 0$$

は，

$$\omega^5 = 0$$

というすべての波の振動数が縮退した形になる．つまり，非圧縮性という条件から音波も消去されてしまったことになる．以上より，流体中を音波が伝わるには，流体の圧縮性が必要であることがわかる．