地球流体力学演習問題第５章

1. (5.4) 式で $z = 0$, $g = g_0$ (一定) とすると，$1\mathrm{m}^2$ の上空にある大気の質量は $\frac{p(0)}{g_0} = \frac{1000\,[\mathrm{hPa}]}{10\,[\mathrm{m/s^2}]} = 10000\,[\mathrm{kg/m^2}]$ となる．

2. 鉛直１次元方向にのみ気圧の変化する状況で，静力学平衡の関係式から，等温大気についての気圧の分布を求める．また，重力加速度は一定であるとする．まず，静力学平衡の式：
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -g\rho$$
これを理想気体の状態方程式を用いて，温度と圧力に関する式に書き換えると，
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -g\frac{p}{RT}$$
となるので，
$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{RT}\mathrm{d}z$$
という形に書き換えると，変数分離形の微分方程式となる．これを両辺積分すると，g, T が一定であるということから，
$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{g}{RT}z \quad \Rightarrow \quad p = p_0 e^{-z/H}$$
という気圧に関する式が得られる．ここで，
$$H \equiv \frac{RT}{g}$$
は等温大気のスケールハイトであり，p_0 は $z = 0$ における気圧を表している．

3. 重力加速度 g を一定と仮定できるような，地表面付近（対流圏）における温度の分布を考える．このとき，気温の鉛直分布は，
$$T(z) = T_0 - \Gamma z$$
という高度の１次に比例した振る舞い（等減率大気）に近似できる．ここで，T_0 は地表面における気温，$\Gamma \equiv \left|\frac{dT}{\mathrm{d}z}\right|$ は気温減率（ここでは一定）とする．このときに，気圧の高度依存性を求める．
　まず，静力学平衡の式から，理想気体の状態方程式を用いて密度を消去すると，
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -g\frac{p}{RT(z)}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -g\frac{\mathrm{d}z}{RT(z)}$$
となる．次に，考えている大気が等減率大気であることから，上式は
$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}z}{T_0 - \Gamma z}$$

とできる．これは変数分離形の微分方程式であるため，両辺を積分すると，

$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{R}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{T_0 - \mathit{\Gamma} z}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{p(z)}{p_0} = \frac{g}{R\mathit{\Gamma}}\ln\left[\frac{\frac{T_0}{\mathit{\Gamma}} - z}{\frac{T_0}{\mathit{\Gamma}}}\right]$$

となる[3]．以上より，等減率大気の高度分布は

$$p(z) = p_0\left(1 - \frac{\mathit{\Gamma}}{T_0}z\right)^{\frac{g}{R\mathit{\Gamma}}}$$

であることがわかる．この式を用いて，等減率大気の大気上端高度を求める．大気上端では気圧がゼロとなるので，上の高度と気圧の関係式から $p(z) = 0$ となる高度は

$$z = \frac{T_0}{\mathit{\Gamma}}$$

となり，その高さは有限であることがわかる．$T_0 = 300\mathrm{K}$（およそ 27 ℃），$\mathit{\Gamma} = 6.5\mathrm{K/km}$ とすると，その大気上端の高度は約

$$z = 46\,[\mathrm{km}]$$

程度であることがわかる．（実際の大気で等減率の近似が成り立つのは高度 15km 程度の対流圏までである）

地表における気温を 300 K（27 ℃），標準気圧を 1000hPa，気温減率を 6.5K/km，地球大気の気体定数を 287J/K·kg，重力加速度を $9.8\mathrm{m/s^2}$ としたときの，等減率大気と 300 K の等温大気の気圧の鉛直分布を，図 1 に示す．対流圏内（高度 15 km 程度以下）では, 等温大気の気圧の鉛直分布と等減率大気のそれとの際はきわめて小さいことがわかる.

4. ジオポテンシャル $\mathit{\Phi}$ とジオポテンシャル高度 Z の定義は

$$\mathit{\Phi}(z) \equiv \int_0^z g(z)\mathrm{d}z, \quad Z \equiv \frac{\mathit{\Phi}}{g_0}$$

である．ここで，重力加速度 g は z の関数として，

$$g(z) = \frac{GM}{(a+z)^2}$$

$a =$ 地球の赤道半径, $G =$ 万有引力定数, $z =$ 平均海面からの距離, $M =$ 地球の質量

で定義されている．また，g_0 は標準重力加速度といわれ，平均海面における重力加速度を表す（$g_0 = 9.81\mathrm{m/s^2}$）．この知識を用いて，幾何学的な高度とジオポテンシャ

[3]

$$\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{T_0 - \mathit{\Gamma} z} = \frac{1}{\mathit{\Gamma}}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\frac{T_0}{\mathit{\Gamma}} - z} = -\frac{1}{\mathit{\Gamma}}\ln\left[\frac{\frac{T_0}{\mathit{\Gamma}} - z}{\frac{T_0}{\mathit{\Gamma}}}\right]$$

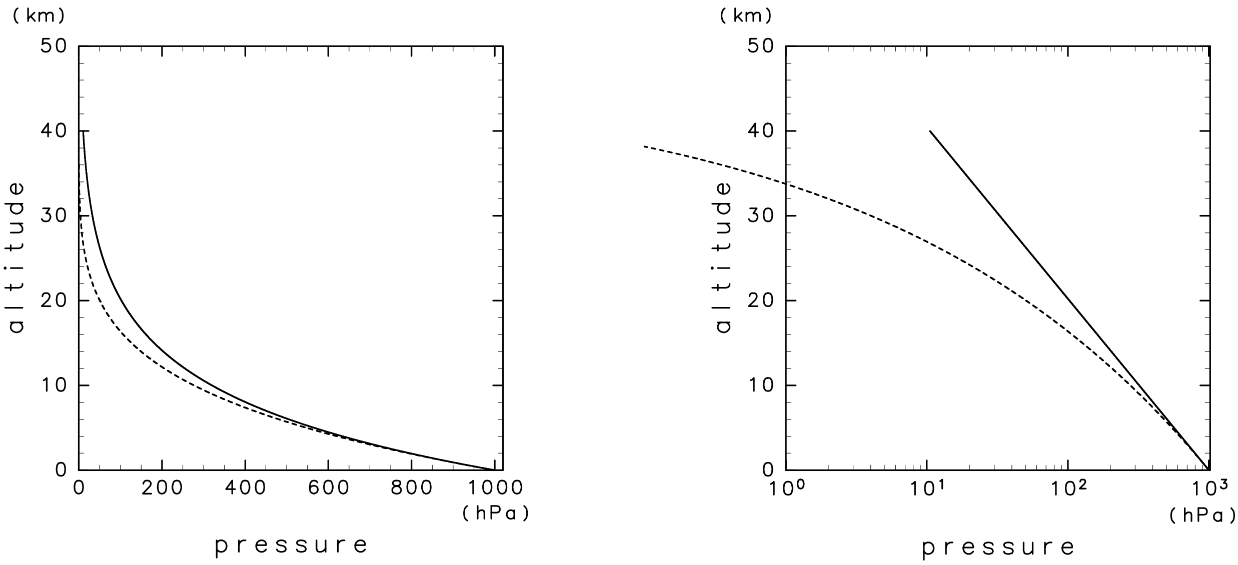

図 1: 等温大気（実線）と等減率大気（破線）における大気圧の鉛直分布.

ル高度の比較を行う.

幾何学的な高度 $z = 100\mathrm{km}$ に相当するジオポテンシャル高度は

$$
\begin{aligned}
Z =& \frac{1}{g_0}\int_0^z \frac{GM}{(a+z)^2}\mathrm{d}z \\
=& -\frac{GM}{g_0}\left[\frac{1}{(a+z)} - \frac{1}{a}\right]
\end{aligned}
$$

ここで，標準重力加速度 g_0 は $g_0 = \dfrac{GM}{a^2}$ という関係を持つので,

$$
\begin{aligned}
=& -a^2\left[\frac{1}{(a+z)} - \frac{1}{a}\right] \\
=& -\frac{a^2}{(a+z)} + a = \frac{az}{a+z}
\end{aligned}
$$

で求めることができる. いま，地球の赤道半径を 6400km とすると，z =100km であるから,

$$
Z = \frac{6400 \times 100}{6400 + 100} \approx 98.46\mathrm{km}
$$

となる. 幾何学的高度とジオポテンシャル高度のズレは

$$
1 - \frac{Z}{z} = \frac{a}{a+z} \approx 1.5\ \%
$$

程度である.

ジオポテンシャル高度 Z と幾何学的高度 z のずれ（$\dfrac{z-Z}{z}$）を図 2 に示す. ただ

し，地球の半径を 6400km として，重力は z の関数で以下のように与えられているものとする．

$$g(z) = \frac{GM}{(a+z)^2}$$

$G =$ 万有引力定数, $M =$ 地球の質量, $a =$ 地球半径, $z =$ 幾何学的高度

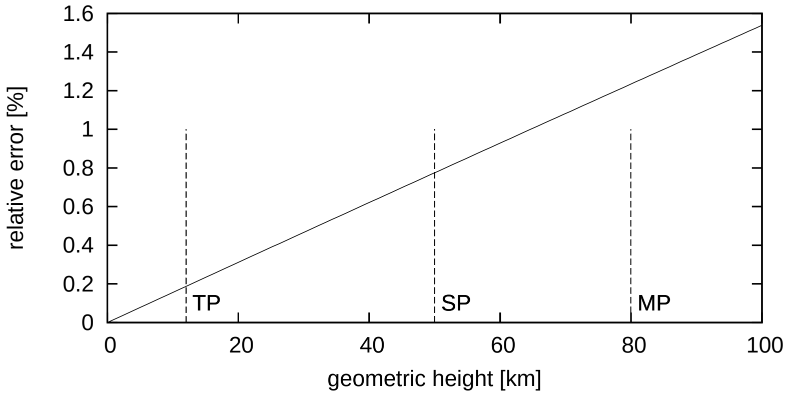

図 2: ジオポテンシャル高度と幾何学的高度のずれ（%表記）

図の TP,SP,MP はそれぞれ，対流圏界面，成層圏界面，中間圏界面を表し，Z と z が１%ずれるのは，中間圏内（高層大気圏）であるということがわかる．（対流圏では，その差は無視できるほど）