地球流体力学演習問題第 4 章

1. 金星大気および火星大気の化学組成は、理科年表（2008）より表 1 のような組成となっており、²大気の気体定数は

$$R = \frac{R^*}{M}$$

$$R^* = \text{普遍気体定数} = 8.314 \times 10^3 \text{ [J/K} \cdot \text{kmol]}, \quad M = \text{惑星大気の分子量}$$

で求めることができる。火星，金星の大気における気体定数をそれぞれ R_M, R_V とすると，表より

$$R_M = \frac{8314}{0.95 \times 44 + 0.027 \times 28 + 0.016 \times 40} = 192.47 \dots \approx 192.5 \text{ [J/K} \cdot \text{kg]}$$

$$R_V = \frac{8314}{0.96 \times 44 + 0.034 \times 28} = 192.48 \dots \approx 192.5 \text{ [J/K} \cdot \text{kg]}$$

となる。ただし，窒素，二酸化炭素，アルゴンの分子量はそれぞれ 28,44,40（単位は kg/kmol）とした。

表 1: 火星および金星大気の化学組成（体積百分率）

	CO ₂	N ₂	Ar
火星	95	2.7	1.6
金星	96	3.4	0

2. 熱力学第一法則，理想気体の状態方程式，内部エネルギーの式を用いて (4.14) 式を求める。まず，熱力学第一法則の式に内部エネルギーの式： $dU = C_v dT$ を代入し，整理すると，

$$\begin{aligned} C_v dT &= T dS - p d \left(\frac{1}{\rho} \right) \\ &= T dS + \frac{p}{\rho^2} d\rho \end{aligned}$$

となる。さらに温度 T で割って整理すると，

$$dS = C_v d \ln T - \frac{p}{\rho^2 T} d\rho. \tag{4}$$

(4.14) 式は p, ρ, S で表されているので，理想気体の状態方程式より温度を消去することを考える。理想気体の状態方程式は

$$\frac{p}{\rho T} = R,$$

と書ける。また，上式対数をとって，微分すると

$$d \ln T = d \ln p - d \ln \rho.$$

²ただし，それぞれの気体組成の中で，1%以上の割合を示す成分のみを用いる。

上の2つの関係式を(4)に代入して変形すると,

$$\begin{aligned} dS &= C_v d \ln p - (C_v + R) d \ln \rho \\ &= C_v d \ln p - C_p d \ln \rho. \end{aligned}$$

ここで, Mayer の関係式 $C_p = C_v + R$ を用いた. 変数分離形の微分方程式が得られたので, これを両辺積分すると,

$$S - S_0 = C_v \ln \frac{p}{p_0} - C_p \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

となる. ただし, エントロピーが S_0 のときの圧力, 密度の値をそれぞれ p_0, ρ_0 とした. これを p について表すと, (4.14) 式:

$$p = \frac{p}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma \exp \left[\frac{S - S_0}{C_v} \right]$$

が得られる. ここで, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ とした.

3. ポアソンの関係式 (4.15):

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

を理想気体の状態方程式を用いて, ρ から T に直すと,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\frac{p}{RT}}{\frac{p_0}{RT_0}} \right)^\gamma$$

となる. ただし, T_0 における圧力を p_0 とした. これをさらに変形すると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1-\gamma} &= \left(\frac{T_0}{T} \right)^\gamma \\ \Rightarrow \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\gamma-1} &= \left(\frac{T}{T_0} \right)^\gamma \\ \Rightarrow \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned}$$

が得られる. なお,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-1} &= \frac{\frac{C_p}{C_v}}{\frac{C_p}{C_v} - 1} \\ &= \frac{C_p C_v}{C_v R} \\ &= \frac{C_p}{R} \end{aligned}$$

(5)

なので, $\kappa \equiv \frac{R}{C_p}$ として, (4.21) 式は,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/\kappa} \quad (6)$$

とも書かれる. 上の式を用いて, 温位の定義式は

$$T_0 = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa$$

となる.

4. 温位とエントロピーの関係 (4.20) 式の導出.

2の問題の解答で, (4) 式から, 理想気体の状態方程式を使って ρ を消去する.

$$\begin{aligned} dS &= C_v d \ln T + R d \ln \rho \\ &= C_v d \ln T + R d \ln T - R d \ln p \\ &= C_p d \ln T - R d \ln p. \end{aligned} \quad (7)$$

一方, 温位の定義式 $\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa$, $\kappa \equiv \frac{R}{C_p}$ の対数を取り, 両辺を微分する:

$$\begin{aligned} \ln \theta &= \ln T + \kappa(\ln p_0 - \ln p). \\ d \ln \theta &= d \ln T - \kappa d \ln p \\ &= d \ln T - \frac{R}{C_p} d \ln p. \end{aligned} \quad (8)$$

(7) と (8) を見比べると

$$dS = C_p d \ln \theta \quad (9)$$

となることに気づく. 上式を両辺積分して,

$$S = C_p \ln \theta + \text{const}$$

が得られる.