地球流体力学演習問題第３章

1. (3.5) 式は
$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$
であるので，ラグランジュ的微分をオイラー微分に直すと，上式は
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$
となる．微分の性質より，左辺第２，３項がまとめられ，
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$
となり，(3.6) 式に一致する．

2. (3.9) 式を和の規約を用いて表すと，$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i$, $\nabla = \boldsymbol{e}_i \partial_i$ なので
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{e}_i \partial_i (\rho v_j \boldsymbol{e}_j) \\ &= \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \partial_i (\rho v_j) \\ &= \delta_{ij} \partial_i (\rho v_j) \\ &= \partial_i (\rho v_i). \end{aligned}$$
1 行目から 2 行目の変形には, chain rule と $\partial_i \boldsymbol{e}_j = 0$ を用いた.[1] したがって,
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0$$
となる．

3. 2 つの式, A の Lagrange 的保存の式 $\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} = 0$ と質量保存の式 $\frac{\mathrm{D}(\rho \delta V)}{\mathrm{D}t} = 0$ を用いる．

   - $a \equiv \frac{A}{\rho \delta V}$ より, $A = a(\rho \delta V)$.
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}a(\rho\delta V)}{\mathrm{D}t} \\ &= (\rho \delta V)\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}t} + a\frac{\mathrm{D}(\rho \delta V)}{\mathrm{D}t} \\ &= (\rho \delta V)\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}t} = 0 \end{aligned}$$
   $\rho \delta V \neq 0$ なので, $\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}t} = 0$.

[1] デカルト座標系では, 単位ベクトルの微分は必ずゼロである.

- $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{D}\delta V}{\mathrm{D}t}$ を用いる. (講義ノートの (3.4) 式参照.)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}\tilde{a}\delta V}{\mathrm{D}t} \\
&= \delta V \frac{\mathrm{D}\tilde{a}}{\mathrm{D}t} + \tilde{a}\frac{\mathrm{D}\delta V}{\mathrm{D}t} \\
&= \delta V \frac{\mathrm{D}\tilde{a}}{\mathrm{D}t} + \tilde{a}\delta V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \\
&= \delta V \left(\frac{\mathrm{D}\tilde{a}}{\mathrm{D}t} + \tilde{a}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \right) \\
&= \delta V \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\tilde{a} + \tilde{a}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \right) \\
&= \delta V \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\tilde{a}\boldsymbol{v}) \right) = 0
\end{aligned}
$$

$\delta V \neq 0$ なので, $\frac{\partial \tilde{a}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{a}\boldsymbol{v}) = 0$