

地球流体力学演習問題第2章¹

1. Lagrange 的記述においては、物理量は物質座標 (a, b, c) (これは流体粒子を識別するための流体粒子の名前に対応するものである) と時刻 t の関数であり、Lagrange 微分はある流体粒子に注目し、そのもつ物理量の時間変化率を調べるものであるから $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{a,b,c}$ である。一方、Euler 的記述においては、物理量は空間座標 (x, y, z) と時刻 t の関数であり、Euler 微分はある場所 (空間的に固定された観測点) における物理量の時間変化率を調べるものであるから $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{x,y,z}$ である。

2. デカルト座標系の i 方向の単位ベクトルを e_i として、 v, ∇ を和の規約を使って表すと、それぞれ、 $v = v_i e_i, \nabla = e_i \partial_i$ となる。ラグランジュ微分のオイラー表現で現れる移流項演算子、 $v \cdot \nabla$ を和の規約を用いて表すと、

$$\begin{aligned} v \cdot \nabla &= v_i e_i \cdot e_j \partial_j \\ &= v_i \partial_j \delta_{ij} \\ &= v_i \partial_i. \end{aligned} \tag{1}$$

となる。

3. 以降の問題では、ラグランジュ微分のオイラー表記が

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$$

であることを用いる。

- (a) この問題設定での圧力の空間分布を考えたとき、移流項 $v \cdot \nabla p$ は

$$v \cdot \nabla p = u \frac{\partial p}{\partial x}$$

となる。ここで、 x は東西方向の空間座標、 u は東西方向の風速場ベクトルを表す。

- (b) 状況設定より、気圧の東西方向の勾配、および船の速度 (この問題では船を空気塊とみなし、観測者は空気塊とともに移動していると仮定する。よって、空気塊の気圧の時間変化が船上で観測した圧力の時間変化ととらえるので、船の速度が風速場と一致する) と空気塊の気圧の時間変化はそれぞれ、

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{0.1 \text{ kPa}}{3 \text{ h}}, \quad u = 10 \text{ km/h}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{0.3 \text{ kPa}}{180 \text{ km}}$$

¹2009 年 5 月 27 日:辻野氏の解答例を若干修正

である．ここで，東方向を正とした．これらを用いてこの領域に存在する島（固定観測点）での気圧の時間変化 $\frac{\partial p}{\partial t}$ を求めると，

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{Dp}{Dt} - u \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{0.1}{3} + 10 \times \frac{0.3}{180} = 0.05 \text{ kPa/h}$$

となる．

4. 上と同様の考え方をを用いるが，ここで，移流項の特性を考える． $v \cdot \nabla$ はベクトル形式で表されるので， x 座標を東西方向ではなく，北東 - 南西方向に座標をとっても，各物理量は変化しない（ベクトルの回転による不変性）．そこで，北東方向を x 軸の正にとると，各物理量は

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{100 \text{ Pa}}{3 \text{ h}}, \quad u = 10 \text{ km/h}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 5 \text{ Pa/km}$$

である．これらを用いて島での気圧の時間変化 $\frac{\partial p}{\partial t}$ を求めると，

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{100}{3} - 10 \times 5 = -\frac{50}{3} \text{ Pa/h}$$

となる．

5. y 座標を南北方向に北方向を正にとる．このとき，各物理量は

$$\frac{DT}{Dt} = 1 \text{ K/h}, \quad v = -3.6 \times 10\sqrt{2} \text{ km/h}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{3}{50} \text{ K/km}$$

である．ここで， v は南北方向で北向きを正とした風速場を表す．また問題の風速の単位は秒速になっているので，他の与えられた量との単位とそろえるために，時速に換算してある．また，「北東風」とは「南西向き」に吹く風であることに注意する．これらを用いて島での気圧の時間変化 $\frac{\partial T}{\partial t}$ を求めると，

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 1 - 36 \times \sqrt{2} \times \frac{3}{50} \approx -2.05 \text{ K/h}$$

となる．ここでは気温は時間とともに減少することがわかる．

6. 証明は，有限差分と極限操作を用いることにより行う．

$$\begin{aligned}
\delta \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi(x, t) \, dx &= \int_{x_1(t+\delta t)}^{x_2(t+\delta t)} \phi(x, t+\delta t) \, dx - \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi(x, t) \, dx \\
&= \int_{x_1+x_1\delta t+\mathcal{O}(\delta t^2)}^{x_2+x_2\delta t+\mathcal{O}(\delta t^2)} \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta t \right) \, dx - \int_{x_1}^{x_2} \phi \, dx + \mathcal{O}(\delta t^2) \\
&= \int_{x_2}^{x_2+x_2\delta t+\mathcal{O}(\delta t^2)} \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta t \right) \, dx - \int_{x_1}^{x_1+x_1\delta t+\mathcal{O}(\delta t^2)} \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta t \right) \, dx \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta t \, dx + \mathcal{O}(\delta t^2) \\
&= \left(\frac{dx_2}{dt} \phi(x_2, t) - \frac{dx_1}{dt} \phi(x_1, t) + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dx \right) \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad (2)
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi(x, t) \, dx &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi(x, t) \, dx}{\delta t} \\
&= \frac{dx_2}{dt} \phi(x_2, t) - \frac{dx_1}{dt} \phi(x_1, t) + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dx \quad (3)
\end{aligned}$$