地球流体力学演習問題　回答例

この解答例は, 2008 年度の「地球流体力学」履修者の辻野智紀氏 (現 名古屋大学大学院生) が作成したものに, 岩山が若干の修正とその後追加した問題の解答例を付け加えたものである.

地球流体力学演習問題第１章

1. 理想気体の状態方程式，および熱力学第１法則は

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad TdS = c_v dT + pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

で与えられるので，これを用いて系の断熱過程について考える．まず，断熱過程であるため，エントロピーの変化はなく，$dS = 0$ である．また，状態方程式を微分すると，

$$\frac{dp}{\rho} + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = RdT$$

となるので，これを熱力学方程式の dT に代入し，$dS = 0$ という条件を課すと，

$$\frac{c_v}{R}\left[\frac{dp}{\rho} + pd\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_v}{R}\frac{dp}{\rho} + \frac{c_v}{R}pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_v}{R}\frac{dp}{\rho} + \frac{c_v + R}{R}pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_v}{R}\frac{dp}{\rho} - \frac{c_v + R}{R}\frac{p}{\rho^2}d\rho = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_v}{R}\frac{dp}{p} - \frac{c_v + R}{R}\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

となる．これは変数分離形の微分方程式であるため，両辺を積分すると，

$$c_v\int\frac{dp}{p} = (c_v + R)\int\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{dp}{p} = \frac{c_p}{c_v}\int\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \ln p = \gamma\ln\rho + Const.$$

$$\Rightarrow \quad p = C\rho^{\gamma}$$

となり，ポアソンの関係式が得られる．ここで，マイヤーの関係式 $c_p = c_v + R$ と比熱比 $\gamma \equiv \dfrac{c_p}{c_v}$ を用いた．

2. ここで，ポアソンの関係式は既知のものとする．

   (a) 物理量 $\sqrt{\left(\dfrac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S}$ の単位を考える．ここで，$\left(\dfrac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S$ はエントロピー一定のときの，圧力と密度の変化率なので，MKS 単位では，

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S \ : \ \frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{kgm^{-3}}} = \frac{\mathrm{Nm^{-2}}}{\mathrm{kgm^{-3}}} = \frac{\mathrm{kgms^{-2}m^{-2}}}{\mathrm{kgm^{-3}}} = \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}$$

となるので，これのルートは

$$\left(\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right)^{1/2} = \mathrm{m/s}$$

となり，上記の物理量が速度の次元を持つことが示される．

(b) 断熱過程ではエントロピーが不変であり，かつポアソンの関係式が成り立つので，ポアソンの関係式をエントロピー一定で両辺 ρ で偏微分すると，

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = C\gamma\rho^{\gamma-1}$$

となる．この右辺をもう一度ポアソンの関係式で C を消去すると，

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma RT$$

であることがわかる（最終式への変形は状態方程式を用いた）．これに与えられている具体的な数値を代入して計算すると，

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{\gamma RT}$$

$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$, $R = 287\mathrm{J/K{\cdot}kg}$, $T = 300\mathrm{K}$ であるため，

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1.4 \times 287 \times 300} \\ &\approx 347.2\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる．

(c) さきほど求めた音速に関する温度依存性を表す式：

$$c = \sqrt{\gamma RT}$$

に関して，$T = T_0 + t$ とする．ここで，$T_0 = 273.15\mathrm{K}$，t は摂氏温度を表すとする．このとき，テイラーの１次近似式

$$\sqrt{T_0 + t} \approx \sqrt{T_0}\left(1 + \frac{t}{2T_0}\right)$$

を用いて音速の式を書き直すと，

$$c = \sqrt{\gamma R}\sqrt{T_0 + t} \approx \sqrt{\gamma RT_0}\left(1 + \frac{t}{2T_0}\right)$$

という近似式になるので，これに実際の数値を代入して計算すると，

$$c = \sqrt{1.4 \times 287 \times 273.15} \times \left(1 + \frac{t}{2 \times 273.15}\right) \approx 331.3 + 0.61t$$

となるので，理化学辞典と非常によい精度で一致することがわかる．