

第 5 章

流体力学の基礎方程式の応用 (1) : 静力学平衡

前章までに提示された流体力学の基礎方程式を用いて幾つかの現象を考察してみる．先ずは，重力場中にある流体の性質について考察する．

5.1 大気の鉛直構造

5.1.1 問題設定

本節では，地球大気の鉛直構造について考察する．地球大気は

1. 非粘性流体
2. 理想気体の状態方程式に従う
3. 鉛直方向には静止した（もしくは鉛直速度が極めて小さく無視できる）状態
4. 水平方向には一様である（物理量は x, y には依存しない），鉛直 1 次元問題
5. 流体に働く外力は重力のみ

と仮定する．

流体に働く外力 $\mathbf{K}$ は重力のみなので $\mathbf{K} = -g\mathbf{k}$ である．ここで， g は定数でなく高度依存性があってもよい．そのような g の表現は

$$g = \frac{GM}{(a+z)^2}. \quad (5.1)$$

ここで， G は万有引力定数， M は地球の質量， a は地球の平均半径， z は平均海水面からの高度である．

5.1.2 大気圧とは...

仮定 1, 3, 5 より, 運動方程式 (3.18) の z 成分は,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (5.2)$$

と書ける. この式は, **静水圧平衡の式**もしくは**静力学平衡の式**と呼ばれる. この式は地球流体力学における最も基本的なバランスの式の一つである.*¹ ρ, g 共に正の量である事から, (5.2) が成り立つためには, $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$ でなければいけない. すなわち, **重力場中では圧力(気圧)は高度と共に減少していく**. さらに仮定 4 より, (5.2) は

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (5.3)$$

となる.

(5.3) を高度 z から無限大まで積分する. ここで, $z \rightarrow \infty$ では大気は存在しない, すなわち $p(z \rightarrow \infty) = 0$ とすると,

$$p(z) = \int_z^\infty \rho g dz \quad (5.4)$$

が得られる. (5.4) は高度 z における大気圧は底面積 1 m^2 , 高さが $z \sim \infty$ の気柱の中にある空気の重さに等しいことを言い表している.

5.1.3 気圧の鉛直プロファイル

簡単化のために, さらに

1. 重力加速度は高さに依存しない定数 $g_0 (= \frac{GM}{a^2})$ *²
2. 大気は等温 (温度 T_0) である

と仮定する. このとき, 静水圧平衡の式 (5.3) と理想気体の状態方程式 (4.1)

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{RT_0} dz$$

*¹ このバランスは鉛直方向に関するものである. 水平方向のバランスとして地球流体力学において基本的なものは, Coriolis 力と水平方向の気圧傾度力がバランスした地衡流平衡 (geostrophic balance) である.

*² 我々が日常の経験する大気現象は高度約 15km よりも下層の対流圏で起こっている. 地上の重力加速度に比べて, 高度 15km 上空における重力加速度は小さくなるが, その量は非常に僅かで 0.2% ほどである. そこで, ここでは重力加速度を定数として扱うことにする.

が得られ、この式を高度 $0 \sim z$ まで積分して整理すると、気圧の鉛直プロファイルを与える式

$$p(z) = p(0) e^{-z/H} \quad (5.5)$$

が得られる。ここで、

$$H \equiv \frac{RT_0}{g_0} \quad (5.6)$$

である。(5.5) は、気圧は高度と共に指数関数的に減少していくことを示している。

図 5.1 と図 5.2 にそれぞれ 2005 年 8 月 30 日 9 時に神戸大学 自然科学総合研究棟 3 号館屋上から放球したラジオゾンデによって観測された気圧と気温の鉛直プロファイルを示す。上の考察を支持するように気圧は鉛直方向に指数関数的に減少していくことがわかる。実際の気温は鉛直方向には等温ではないが、気圧の鉛直変化は指数関数的であり、気圧の変化に比べると気温のそれは穏やかなので、近似的に等温とみなすことができ、考察の仮定が満足されているのである。また、(5.5) が成り立つ仮定である静水圧平衡は、実際の大気では必ずしも満足されているわけではないが、大気の状態は静水圧平衡から導かれる結果ともよく一致していることもわかる。

H は**スケールハイト** (scale hight) と呼ばれ、気圧が e^{-1} になる高度であり、大雑把に言うとも大気の厚さを表す。地球を温度 255K の等温大気と仮定するとスケールハイトは約 7 km である。

スケールハイトは鉛直方向の大気の質量分布の重心の位置と解釈することもできる。等温大気の場合には、気圧の鉛直分布 (5.5) と同様に、密度も

$$\rho(z) = \rho(0) e^{-z/H} \quad (5.7)$$

という鉛直プロファイルを持つ。鉛直方向の質量分布の重心 z_G は

$$z_G \equiv \frac{\int_0^\infty z \rho(z) dz}{\int_0^\infty \rho(z) dz} \quad (5.8)$$

で計算される。実際に (5.8) に (5.7) を代入すると

$$z_G = H \quad (5.9)$$

が得られる

5.2 測高公式

5.1.1 節の問題設定の下、本節ではより厳密に重力加速度の鉛直依存性を考慮にいれた議論を行い、圧力と高度の関係を議論する。

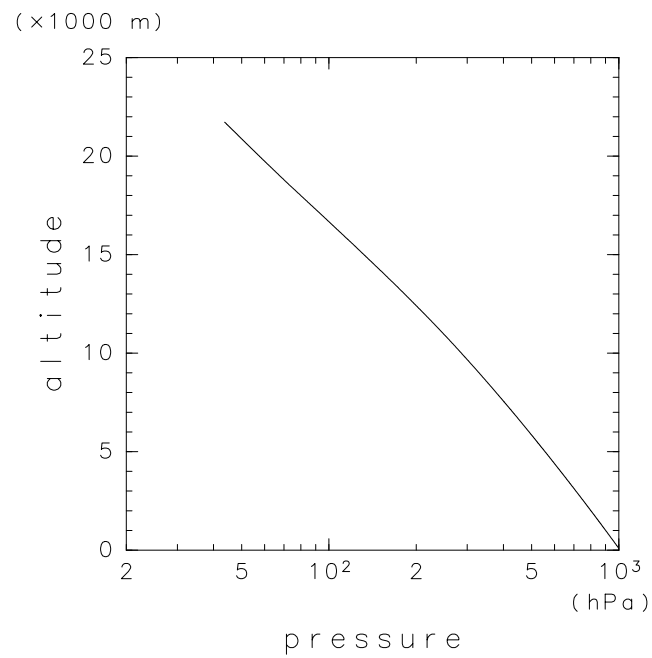


図 5.1 2005 年 8 月 30 日 9 時に神戸大学自然科学総合研究棟 3 号館屋上から放球したラジオゾンデによって観測された気圧の鉛直プロファイル.

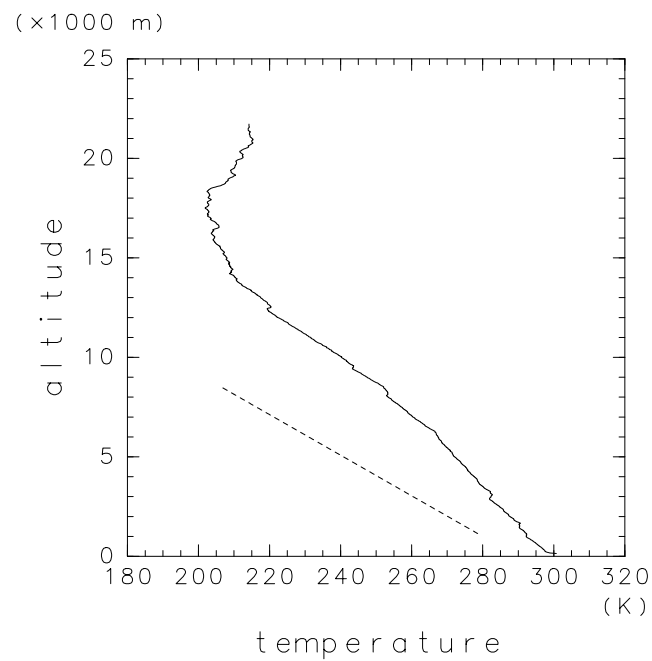


図 5.2 図 5.1 と同様. ただし, 気温のプロファイル. 点線は乾燥断熱減率に従う気温の変化を示している.

平均海水面 ($z = 0$) から高度 z まで単位質量の空気塊を上昇させたときに, それに要する仕事 Φ を **ジオポテンシャル** (geopotential), $Z \equiv \Phi/g_0$ をジオポテンシャル高度 (geopotential hight) と呼ぶ:

$$\Phi(z) \equiv \int_0^z g \, dz. \quad (5.10)$$

ここで, g_0 は平均海水面における全球平均重力加速度 $g_0 = 9.81 \, \text{m s}^{-2}$ である. ジオポテンシャル高度は対流圏や下部成層圏では幾何学的高度 z とほぼ同じ数値をとる.

(5.10) の積分変数を静水圧平衡の式を用いて z から p に変数変換する. このとき理想気体の状態方程式 (4.1) を用いて, (5.3) の密度 ρ を圧力 p と 温度 T で書きかえておく. 結果は

$$\Phi(z) - \Phi(0) = -R \int_{p(0)}^{p(z)} T \, d \ln p \quad (5.11)$$

である. (5.11) は**測高方程式** (hypsometric equation) と呼ばれる. (5.11) より, 気圧面 p_1 と p_2 の厚さ (ジオポテンシャルの差であり, 層厚 (thickness) と呼ばれる)*³は

$$Z_T \equiv Z(p_2) - Z(p_1) = -\frac{R}{g_0} \int_{p_1}^{p_2} T \, d \ln p, \quad (5.12)$$

で与えられる. 気球に観測機器 (ラジオゾンデ) を係留して放球し, 大気の気温や気圧を観測したとき, それらの値と (5.12) を用いて温度, 気圧の値を Z の関数としてすなわちジオポテンシャル高度の関数として表現することができる.

ここで, ある気圧 p_1 と p_2 の間にある大気の平均温度 $\langle T \rangle$ を

$$\langle T \rangle \equiv \frac{\int_{p_1}^{p_2} T \, d \ln p}{\int_{p_1}^{p_2} d \ln p} \quad (5.13)$$

で定義する. このとき p_1 面と p_2 面の層厚は

$$Z_T = -H \ln(p_2/p_1) \quad (5.14)$$

$$H \equiv \frac{R \langle T \rangle}{g_0}, \quad (5.15)$$

で与えられる. 即ち, ある与えられた 2 つの気圧面の層厚はその気層の平均温度に比例する.

*³ $p_1 > p_2$ 即ち, p_1 面が p_2 面よりも下層にあるとする.

5.3 乾燥大気の鉛直方向の安定性

5.1.3 節では、静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式から気圧の鉛直プロファイルを導いた。気温の鉛直プロファイルは、太陽からの太陽放射や地球から射出する赤外線を中心とした地球放射が大気にどのように吸収されるか、といった議論により導かれる。このような議論は大気放射学として知られており、後期に開講される「地球および惑星大気科学」において扱われるだろう。本節では、放射の議論は抜きにして、静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式から導かれる、気温の鉛直プロファイルを規定する規範について議論する。

以下の議論は**パーセル法**と呼ばれる方法である。パーセル法は系をパーセルとその外界とに分離し、パーセルが運動しても外界はその影響を受けないと仮定する考え方である。

5.1.1 節と同じ状況設定で、初期に高度 z にある流体粒子（パーセル）を $z + \Delta z$ まで変位させたときの運動についてを考える。ここでは流体粒子に関して以下の仮定をおく。

1. 流体粒子は乾燥している（水蒸気は含まない）^{*4}
2. 流体粒子の変位は微小量
3. 流体粒子の変位は断熱過程
4. 流体粒子の持つ圧力と、その外界の圧力とは常に等しい
5. 外界は静水圧平衡の状態にある

仮定 3 より、このとき流体粒子の持つ温位、

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa, \quad (5.16)$$

は変位の前後で一定に保たれる。ここで $\kappa = \frac{R}{C_p}$ である。なぜならば、温位はエントロピー S と (4.21) の関係で結ばれ、エントロピーは断熱過程において一定に保たれるからである。なお、温位 θ は状態方程式 (4.1) を用いて圧力と密度で表現すると、

$$\theta = \frac{p_0}{R\rho} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}, \quad (5.17)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (5.18)$$

と表現できる。

流体粒子の持つ物理量を添え字 p であらわし、一方、流体粒子の外界の物理量を添え字

^{*4} 水蒸気を含む場合、気圧や気温の変化によって水蒸気が凝結し潜熱の解放が起こるので、この議論のように断熱という仮定が成り立たなくなる。

env であらわすことにする．流体粒子の運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{D^2 \Delta z}{Dt^2} &= -\frac{1}{\rho_p(z + \Delta z)} \left(\frac{dp_{\text{env}}}{dz} \right)_{z+\Delta z} - g \\ &= \frac{\rho_{\text{env}}(z + \Delta z) - \rho_p(z + \Delta z)}{\rho_p(z + \Delta z)} g.\end{aligned}$$

と書ける．ここで添え字 $(\bullet)_{z+\Delta z}$ は $z + \Delta z$ においてカッコ内の物理量を見積もることを表している．第 1 式から第 2 式への変形は、外界が静水圧平衡の状態（仮定 5）にあることを用いた．

高度 $z + \Delta z$ における外界の密度、および流体粒子の密度を求める．外界の密度は $\mathcal{O}(\Delta z)$ の範囲内で

$$\rho_{\text{env}}(z + \Delta z) = \rho_{\text{env}}(z) + \left(\frac{d\rho_{\text{env}}}{dz} \right)_z \Delta z \quad (5.19)$$

である．同様に、流体粒子の密度は

$$\rho_p(z + \Delta z) = \rho_p(z) + \frac{d\rho_p}{dz} \Delta z$$

である．ここで、密度の鉛直微分は (5.17) を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_p}{dz} &= \frac{d}{dz} \left[\frac{p_0}{R\theta_p} \left(\frac{p_p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{p_0}{R\theta_p} \left(\frac{p_p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \frac{1}{p_p} \frac{dp_p}{dz} \\ &= \left(\frac{\rho_p}{\gamma} \frac{d \ln p_p}{dz} \right)_z,\end{aligned} \quad (5.20)$$

と書ける．さらに流体粒子の初期位置 z では流体粒子内の物理量と外界の物理量は等しいので^{*5}、 $\rho_p(z) = \rho_{\text{env}}(z)$ である．また仮定より、 $p_p = p_{\text{env}}$ である．これらを用いて、

$$\rho_p(z + \Delta z) = \rho_{\text{env}}(z) + \left(\frac{\rho_{\text{env}}}{\gamma} \frac{d \ln p_{\text{env}}}{dz} \right)_z \Delta z, \quad (5.21)$$

(5.21), (5.19) を用いると、流体粒子の運動方程式は $\mathcal{O}(\Delta z)$ の範囲内で

$$\frac{D^2 \Delta z}{Dt^2} = g \left(\frac{d \ln \rho_{\text{env}}}{dz} - \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p_{\text{env}}}{dz} \right)_z \Delta z.$$

(5.17) を用いると上式は

$$\frac{D^2 \Delta z}{Dt^2} = -g \left(\frac{d \ln \theta_{\text{env}}}{dz} \right)_z \Delta z \quad (5.22)$$

^{*5} なぜなら流体粒子と外界の区別はないから．

と表される.

この方程式は, 流体粒子の外界の温位の鉛直プロファイルに依存して, 流体粒子の運動の形態が異なることを示している. 定数係数の2階の微分方程式の知識から,

- $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z > 0$ であれば, 流体粒子は変位に伴って復元力を受け, 高度 z を中心とした振動運動を起こす.
- $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z < 0$ であれば流体粒子の変位は時間とともに指数関数的に増大してしまう.

ことがわかる. 即ち, $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z < 0$ のような環境場は不安定である. したがって, 微小擾乱に対して鉛直方向に大気が安定であるためには, $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z > 0$ でなければいけない. $\left(\frac{d\theta_{\text{env}}}{dz}\right)_z = 0$ が安定と不安定の境となる.

図 5.3 に実際に観測された 図 5.1, 5.2 に対応する温位を示した. 温位は高さとともに増大し, 特に高度 15 km よりも上空では温位の増大は著しい. この高度領域は下部成層圏である.

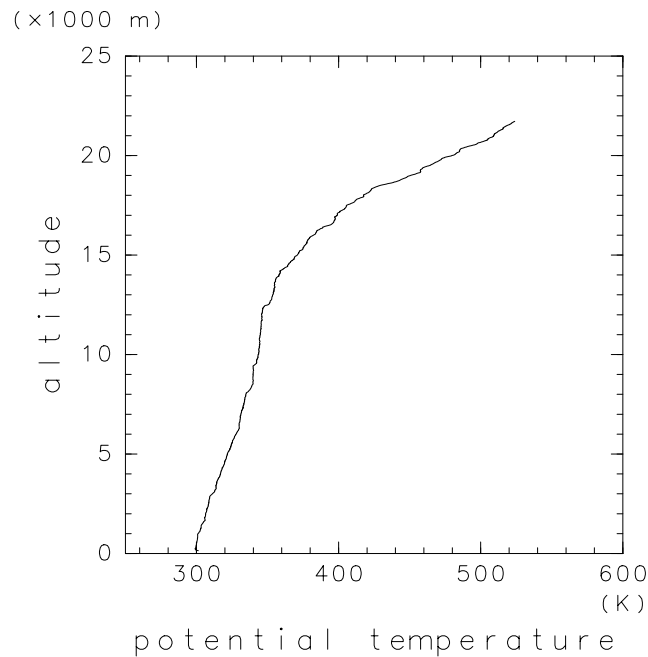


図 5.3 図 5.1 と同様. ただし, 温位のプロファイル.

5.3.1 乾燥断熱減率

水蒸気を含まない大気について、鉛直方向の安定性の境となる温度プロファイルを求めて見る。先の温位の鉛直プロファイルを温度で表現すると、

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dz} &= \frac{d}{dz} \left\{ T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \right\} \\ &= \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \left(\frac{dT}{dz} - \frac{\kappa T}{p} \frac{dp}{dz} \right).\end{aligned}$$

安定性の境は $\frac{d\theta}{dz} = 0$ であり、また静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式を用いると、上式から

$$\Gamma_d \equiv -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{C_p} \quad (5.23)$$

が得られる。 Γ_d は乾燥断熱減率と呼ばれ、地球大気の場合、 $\Gamma_d = 9.8 \text{ K/km}$ の値をとる。

5.3.2 Brunt–Väisälä 振動数

(5.22) の形の微分方程式は $\frac{d \ln \theta_{\text{env}}}{dz} > 0$ の時、

$$\Delta z = C_+ e^{iNt} + C_- e^{-iNt} \quad (5.24)$$

$$N \equiv \sqrt{g \frac{d \ln \theta_{\text{env}}}{dz}} \quad (5.25)$$

のような振動数 N で振動する解をもつ。このような振動数は Brunt–Väisälä 振動数と呼ばれるものである。

観測によると Brunt–Väisälä 振動数は対流圏で $N \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ である。

5.4 アルキメデスの原理

水に物体を沈めると、物体が浮いたり物体の重さが水に沈める前よりも軽くなるのが日常経験から知られており、これは浮力の効果によるものであることもよく知られている。理化学辞典 [岩波書店] によると浮力 (buoyancy force) とは、“地球上 (一様な重力場中) では、流体内にある物体にはその表面に作用する流体の圧力のため、全体として上向きの力を受ける。これを浮力という。浮力の大きさと作用点とは、物体の押し退けた流体の重さと重心とに一致する (アルキメデスの原理)” とある。

実は浮力は鉛直方向の圧力傾度力であり、アルキメデスの原理は静水圧平衡の言い換えであることがわかる。

一様な重力場中（重力加速度 g が一定）で一様な密度 ρ を持つ非粘性流体の静止状態を考える．図 5.4 で表される状況で，注目する物体（底面積 dS ，厚さ dz ）に働く力を考える．物体の上面には鉛直下向きに圧力 $p(z + dz)$ ，物体の下面には鉛直上向きに圧力 $p(z)$ が働いている．したがって，物体に働く圧力に伴う正味の力は鉛直上向きを正として

$$\{p(z) - p(z + dz)\} dz dS \quad (5.26)$$

の力が働いている．静止した流体中では圧力は上空に行くに従って減少するので (5.26) は正の量である．(5.26) が上の文章で言うところの浮力である．さらに静水圧平衡の式を積分することにより

$$0 = - \iint_{dS} dx dy \int_z^{z+dz} dz \frac{dp}{dz} - \iint_{dS} dx dy \int_z^{z+dz} dz \rho g, \\ \{p(z) - p(z + dz)\} dz dS = \rho g dz dS \quad (5.27)$$

である．浮力の大きさ（左辺）は物体が押しのけた流体の重さ（右辺）に等しいことがわかる．さらに，体積力（右辺）の作用点は力が働いている物体の重心である．つまりアルキメデスの原理とは静力学平衡の式の言い換えであることがわかる．

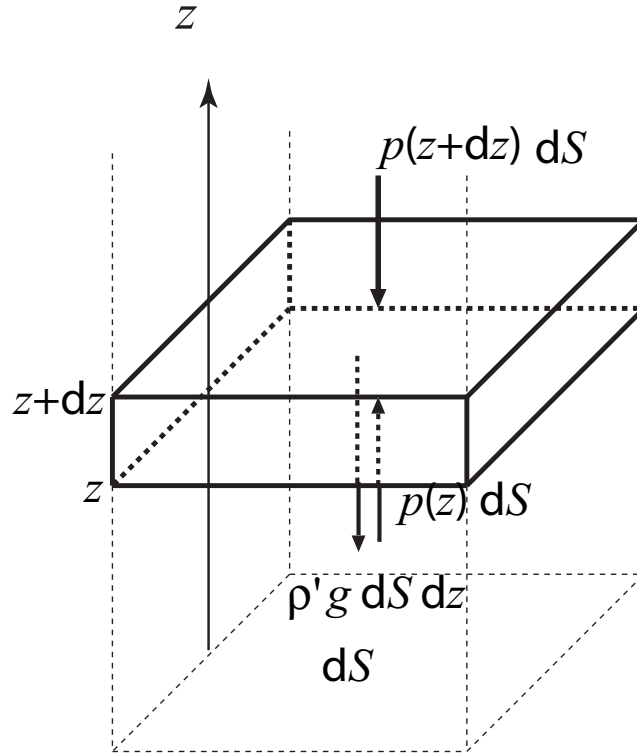


図 5.4 重力場中において静止した流体中にある底面積 dS ，高度 z と $z + dz$ の間にある密度 ρ' の物体に働く力．

演習問題

1. 地上気圧が 1000 hPa のとき, 1 m^2 の上空にある空気の質量を求めなさい. ただし, 重力加速度は高度に依存せず一定値 $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ とする.
2. g, T が高さに依存性しないと仮定し, (5.3) から, (5.5) を導きなさい.
3. 重力加速度 g を定数と仮定する. 気温が高さとともに

$$T(z) = T_0 - \Gamma z \quad (5.28)$$

と一定の減率で減少するとき, 静水圧平衡の式, 理想気体の状態方程式を用いて気圧と高度との間の関係

$$p(z) = p(0) \left(1 - \frac{\Gamma}{T_0} z \right)^{g/(R\Gamma)} \quad (5.29)$$

を求めなさい. さらに, このような温度分布を持つ大気は有限の高さで終わる (有限の高度で気圧が 0 になる) ことを証明しなさい.

4. 高度 $z = 0$ において重力加速度が $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$ であるとする. このとき幾何学的な高度 $z = 100 \text{ km}$ におけるジオポテンシャル高度 Z と幾何学的な高度 z との差を求めなさい.
5. (5.17) を導出しなさい.