第 10 章

水の波

10.1　序

「波」は「渦」と並んで地球流体現象を記述・解釈するための重要な概念である．ここでは, 重力場中で静止した液体 (水, 海) の自由表面が何らかの影響で撹乱されて生じる流体運動, 波動現象を考察する．液体である水や海の自由表面付近の運動を考察するので, その圧縮性は問題にならない．また, 粘性の影響も, 海洋などに生じる大規模な波動においては無視することができる．そこで**密度が一様な非粘性流体**を考察の対象とする．

波の伝播には復元力が必要で, 復元力の種類に応じて波の種類が分類される．例えば, ここで考察するような水の表面を伝播する波に付いては, 復元力として重力と水の表面張力が考えられ, それぞれを復元力とする波は「重力波 (gravity wave)[*1]」, 「表面張力波 (capirally wave), または, さざ波 (ripple)」と呼ばれる．海洋の波動のような大規模な運動を考察する場合には, 水の表面張力の影響はほぼ無視することができるので[*2], ここでは重力波のみを考察することにする．なお, 座標系は**慣性系**であるとする．

10.2　水の波の境界値問題: 問題設定

■座標系　静止した水の表面に沿って, x, y 軸を, 鉛直方向に z 軸をとる．水の静止水面 (水平面) を $z = 0$, 底面を $z = -h(x, y)$, $h(x, y) > 0$ とする．$h(x, y)$ は底面地形である．また波高を $\eta(x, y, t)$ とする．底面地形 $h(x, y)$ は既知もしくは与えられるものであるが, 波高 $\eta(x, y, t)$ は未知変数である．

[*1] 一般相対性理論で出てくる重力波とはことなる．日本語では同じ表現であるが英語では gravity wave, gravitational wave と区別される．

[*2] 水深 1 cm 以上で現象の水平の大きさが, 2 cm 以下の波はさざ波であるといえる．(巽友正: 「流体力学」(陪風館, 1986))

■初期条件　静止状態から運動が始まるものとする．すなわち初期に渦なしの流れであったから, Lanrange の渦定理 (9.3 節参照) より, 任意の時刻で運動は渦無しである．したがって, 速度ポテンシャル Φ が存在する:

$$\boldsymbol{v} = \nabla\Phi. \tag{10.1}$$

すなわち, $\eta(x,\,y)$ 以外にも未知変数が存在する．

■非圧縮条件　ここでは密度一様な流体[*3](非圧縮性流体) を考察するので, 連続の式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{10.2}$$

となる．(10.1) を (10.2) に代入して,

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{10.3}$$

を得る．即ち, 速度ポテンシャル Φ は Laplace 方程式を満足する．このような関数は特に**調和関数**と呼ばれる．

(10.3) を解くためには, 水平 $(x,\,y)$ 方向と鉛直 (z) 方向の境界条件が必要である．ここでは水平方向はとりあえず何の条件も指定せず, 鉛直方向のみ境界条件を設定する．[*4]

■底面における境界条件　底面に垂直な流れは存在できないから, 底面のある点における法線を $\boldsymbol{n}$ とすると,

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = (\nabla\Phi)\cdot\boldsymbol{n} = 0,\ \text{at}\ z = -h(x,\,y) \tag{10.4}$$

■水面における境界条件　ある時刻に水の表面を構成していた流体粒子はその後も水の表面を構成し続ける．したがって,

$$F(x,\,y,\,z,\,t) = z - \eta(x,\,y,\,t) = 0, \tag{10.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{D}t} - \frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}t}\\ &= w - \left(\frac{\partial\eta}{\partial t} + u\frac{\partial\eta}{\partial x} + v\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = 0,\end{aligned}$$

$$w = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u\frac{\partial\eta}{\partial x} + v\frac{\partial\eta}{\partial y}. \tag{10.6}$$

さらに (10.1) を考慮して

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\quad \text{at}\quad z = \eta(x,\,y). \tag{10.7}$$

[*3] 均質流体 (homogeneous fluid) という

[*4] 水平方向には, 例えば無限遠まで流体が存在しているとか, 長方形の容器に流体が閉じ込められているといった条件を考える．

Laplace 方程式 (10.3) は z に関して 2 階の微分を含むから, z に関する境界条件は上記の二つでよい筈である．しかしながら, (10.7) は未知関数 η を含んでいるので, このままでは問題は閉じない．η と Φ の関係を与える式を考慮して, (10.7) を Φ だけの式にする必要がある．それが以下の条件である．

■表面圧力の条件　9.7 節で見たように, 保存力場 (ポテンシャル U) 中の非粘性順圧流体の渦無し運動では, Euler 方程式は空間に関して 1 階積分でき, 圧力方程式 (9.44)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\nabla \Phi\right|^2 + P + U = f(t) \tag{10.8}$$

が成立する．ここで $P = \int \rho^{-1}\, dp$ は非圧縮 (密度一定の流体) の場合には $P = p/\rho$, さらに重力場中では $U = gz$ なので表面では $U = g\eta$ である．表面での大気圧を p_∞ とし, 任意関数 $f(t)$ を $f(t) = p_\infty/\rho$ と選ぶ．このとき圧力方程式 (10.8) は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\nabla \Phi\right|^2 + g\eta = 0,$$

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2g}\left|\nabla \Phi\right|^2, \text{ at } z = \eta \tag{10.9}$$

となる．(10.9) を (10.7) に代入すると, 境界条件は Φ だけで表される．

■まとめ　以上をまとめると, 密度が一様な非粘性流体の自由表面の渦無し運動を支配する方程式系は, 境界条件 (10.4), (10.7), (10.9) のもとで Laplace 方程式 (10.3) を解くことに帰着する．

10.3　微小振幅波

前節で導出された基礎方程式は, 解くべき方程式, Laplace 方程式 (10.3), は線形の方程式であるが, 境界条件 (10.7), (10.9) は問題の解である自由表面上 $z = \eta$ で与えなければならないという非線形問題になっている．そこでこの方程式系を一般的には手で (解析的に) 解くことができない．解析的に問題を解くためには方程式系を何らかの近似を用いて簡単化しなければならない．ここでは波にともなって起こる流体運動の大きさが 1 次の微小量であるとして問題を線形化して解くことを考える．このような近似のもとで得られる波の解は, 波の振幅が 1 次の微小量であることから**微小振幅波**と呼ばれている．同様の考え方, 手続きは既に音波を考察した 6.2 節で行った．

波に伴って起こる流体運動の大きさを 1 次の微小量であるとすると, 未知関数 Φ, η は 1 次の微小量になる．そこで, Φ, η の 2 次以上の項は小さいとして無視する．したがって,

(10.7), (10.9) はそれぞれ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \text{at} \quad z = \eta, \tag{10.10}$$

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \text{at} \quad z = \eta. \tag{10.11}$$

(10.11) を (10.10) に代入すると Φ だけの条件になる:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{at} \quad z = \eta. \tag{10.12}$$

さらに, $\Phi(x, y, \eta, t)$ を $z = 0$ のまわりで Taylor 展開すると

$$\Phi(x, y, \eta, t) = \Phi(x, y, 0, t) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} \eta + \ldots \tag{10.13}$$

展開の第 2 項から先の項は, 2 次以上の微小量なのでやはり無視することができる. そこで境界条件 (10.12) は $z = \eta$ ではなく, $z = 0$ において課すことができる.

したがってまとめると, 微小振幅の場合には, 解くべき方程式系は

$$\nabla^2 \Phi = 0, \tag{10.14}$$

$$(\nabla \Phi) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \text{at} \quad z = -h(x, y), \tag{10.15}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{at} \quad z = 0 \tag{10.16}$$

である. 水の表面の形は

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{at} \quad z = 0 \tag{10.17}$$

で与えられる.

10.4　一様な深さの海 (1 次元波)

ここでは取り扱いを簡単化するために (x, z) 面に平行な平面内の運動を考察することにする. また底面地形 $h(x, y)$ は一定とする.

10.4.1　自由表面の形

基礎方程式は, (10.14)〜(10.16) より

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{10.18}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{at} \quad z = -h, \tag{10.19}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{at} \quad z = 0 \tag{10.20}$$

である．

解の形を x, t について正弦波型 (sinusoidal form) と仮定する:

$$\Phi(x,\, z,\, t) = \phi(z)\, \cos\left(kx - \omega t\right). \tag{10.21}$$

ここで, Φ は x, t についてそれぞれ $\lambda = 2\pi/k$, $T = 2\pi/\omega$ で周期的である．λ, T はそれぞれ波長, 周期と呼ばれる．またその逆数, $\lambda^{-1} = k/2\pi$ は x 軸方向の単位長さあたりに含まれる波の数で波数と呼ばれ, $T^{-1} = \omega/2\pi$ は単位時間に起こる波の数で振動数と呼ばれる．cos の argument, $kx - \omega t$ は位相と呼ばれ, 同一位相の点 x の進む速度は

$$kx - \omega t = \mathrm{const}, \qquad x = \frac{\omega}{k}\, t + \mathrm{const},$$

即ち,

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{10.22}$$

で移動する．c を位相速度と呼ぶ.

(10.21) を (10.18) に代入すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\phi - k^2\phi &= 0, \\
\phi &= C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}, \\
\Phi &= \left(C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}\right) \cos\left(kx - \omega t\right).
\end{aligned}$$

境界条件 (10.19) を考慮して,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=-h} &= k\left(C_1 e^{-kh} - C_2 e^{kh}\right) \cos\left(kx - \omega t\right) = 0 \\
C_1 e^{-kh} &= C_2 e^{kh} \equiv \frac{1}{2} C, \\
C_1 = \frac{1}{2} C e^{kh}, &\quad C_2 = \frac{1}{2} C e^{-kh}, \\
\Phi &= C \cosh\left[k\left(z + h\right)\right]\, \cos\left(kx - \omega t\right).
\end{aligned} \tag{10.23}$$

さらに境界条件 (10.20) を考慮すると,

$$\left.\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = -\omega^2 C \cosh\left(kh\right) \cos\left(kx - \omega t\right) + gkC \sinh\left(kh\right) \cos\left(kx - \omega t\right) = 0,$$

$$\omega = \pm\sqrt{gk \tanh(kh)}. \tag{10.24}$$

また水面の形は (10.11) より

$$\begin{aligned}
\eta &= -\frac{1}{g}\, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\
&= \underbrace{-\frac{C\omega}{g}\, \cosh(kh)}_{\text{振幅 } A} \sin(kx - \omega t)
\end{aligned} \tag{10.25}$$

振幅 A を用いて Φ を書き表すと,

$$\Phi = -\frac{Ac}{\sinh(kh)} \cosh\left[k(z+h)\right] \cos(kx - \omega t) \tag{10.26}$$

となる.

10.4.2　分散関係

(10.24) より位相速度を求めると

$$c = \frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \tag{10.27}$$

となり, 波数もしくは波長に依存する. ここで考察している問題は線形問題なのでその一般解はあらゆる k に関して, (10.21) を重ね合わされたものとして表現できる. 即ち, 任意の初期波形からの時間発展は, 各モードが (10.26)〜(10.27) で与えられる k に関する級数もしくは積分として与えられる. このとき, 波を構成している各モードの位相速度は (10.27) にしたがってことなるので, 波の形は時々刻々変化する, 言い替えると波が分散する. そこでこのように波の位相速度 c が 波数 k に依存する性質を波の**分散性**といい, c と k の関係を**分散関係**と呼ぶ. また, c が k に依存しない場合は非分散性と呼ばれる. 音波は非分散性の波動である.

ここで得られた波の解は, $g = 0$ とすると $c = 0$ となり伝播しなくなる. 即ち, この波は重力を復元力とした波である. そこで**重力波 (gravity wave)** と呼ばれる.

10.4.3　流体粒子の軌道

流体粒子の軌道 (座標 $(x,\, z)$) の時間発展を考察する. その運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x,\, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{Ack}{\sinh(kh)} \cosh\left[k(z+h)\right] \sin(kx - \omega t), \tag{10.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w(x,\, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{Ack}{\sinh(kh)} \sinh\left[k(z+h)\right] \cos(kx - \omega t), \tag{10.29}$$

で与えられる. この方程式は非線形方程式であるので, やはり解析的に解くことは不可能であろう. そこでここでも近似を行ってこの方程式を解くことにする.

波に伴う流体粒子の運動を考察しているので, 流体粒子の運動は周期的であると仮定できるだろう. このとき, 流体粒子の位置 $(x,\, z)$ の波の 1 周期にわたる平均値を $(x_0,\, z_0)$ とする. ここで考察してきた現象は微小振幅 (A が 1 次の微小量) なので, 流体粒子の平均位

置からの変位も 1 次の微小量と考えられるであろう:

$$x = x_0 + \underbrace{(x - x_0)}_{1\,\text{次の微小量}},$$
$$z = z_0 + \underbrace{(z - z_0)}_{1\,\text{次の微小量}}.$$

そこで (10.28), (10.29) の右辺における x, z は x_0, z_0 に置き換えてよいであろう．このとき積分は実行できて

$$x = x_0 + \frac{A}{\sinh(kh)}\,\cosh\left[k(z_0 + h)\right]\cos(kx_0 - \omega t), \tag{10.30}$$

$$z = z_0 + \frac{A}{\sinh(kh)}\,\sinh\left[k(z_0 + h)\right]\sin(kx_0 - \omega t), \tag{10.31}$$

をえる．(10.30), (10.31) から時間を消去して粒子の軌道を求めると

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} = 1, \tag{10.32}$$

$$a = A\,\frac{\cosh\left[k(z_0 + h)\right]}{\sinh(kh)}, \tag{10.33}$$

$$b = A\,\frac{\sinh\left[k(z_0 + h)\right]}{\sinh(kh)}, \tag{10.34}$$

となる．この軌道の特長は

- 長半径 a, 短半径 b の楕円軌道である.*5
- 回転方向は $\omega > 0\,(\omega < 0)$ のとき時計回り (反時計まわり) である.
- 楕円の厚み $b/a = \tanh\left[k(z_0 + h)\right]$ は深さ z_0 と共に減少し, 底面 $z_0 = -h$ ではゼロである．すなわち, 水平運動をする.
- 楕円の焦点距離は $2\sqrt{a^2 - b^2} = 2A/\sinh(kh)$ で深さによらず一定である.

水面上 $(z_0 = 0)$ の粒子の運動は, (10.31) より $z = A\sin(kx - \omega t)$ となる．即ち, 水面の変位 (10.25) と無矛盾である．また, 流速 u は, $u \propto \sin(kx - \omega t)$ で η と同位相である．そこで, 水面波の山の部分では粒子は, $x > 0$ に動き, 谷の部分では粒子は, $x < 0$ に動く.

10.4.4　**長い波, 浅水波**

波長 λ が水深 h に比べて十分に長い波, もしくは水深 h が波長 λ に比べて十分に小さい波の場合をここで考える:

$$\frac{h}{\lambda} \ll 1. \tag{10.35}$$

*5 任意の x について $\cosh x \geq \sinh x$ である．(等号は $x = 0$ のとき.)

このとき分散関係 (10.27) は

$$\begin{aligned} c &= \pm\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh(\frac{2\pi h}{\lambda})} \\ &\cong \pm\sqrt{gh} \end{aligned} \tag{10.36}$$

となり, 波は非分散的になる.[*6]

またこのときの流体粒子の軌道は, (10.30), (10.31) より

$$x = x_0 + \frac{A}{kh}\cos(kx_0 - \omega t), \tag{10.37}$$

$$z = z_0 + \frac{A(z_0+h)}{h}\sin(kx_0 + \omega t). \tag{10.38}$$

$x - x_0$, $z - z_0$ の振幅の大きさを比べると

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \frac{\frac{A(z_0+h)}{h}}{\frac{A}{kh}} = k(z_0 + h) = \frac{2\pi(z_0+h)}{\lambda} \ll 1. \tag{10.39}$$

すなわち, 極めて水平に近い運動をする.[*7] さらに x 方向の振幅は深さに依存しないから, 同じ x_0 の位置にある垂直な流体層は, 一体となって x 方向に往復運動をすることがわかる.

このように, 水深に比べて波長が極めて長い波, あるいは波長に比べて水深が極めて浅い波は, 非分散性的であり, それに伴う水の運動は深さに依存しない振幅を持つ水平方向の単振動である. このような波は, **長波**または**浅水波**と呼ばれ, 地球流体力学で極めて重要な波の一つである. また, これを導くのに用いた近似を**長波近似**, あるいは**浅水波近似**という.

■津波　津波は, 海底地震などによって海底が隆起・沈降することによって励起される波で長い波として扱える自然現象の例である.

10.4.5　短波, 深水波

(10.35) とは逆の極限

$$\frac{h}{\lambda} \gg 1. \tag{10.40}$$

の波についても考えることができる. このような波は, 短波, あるいは深水波と呼ばれる.

[*6] $x \ll 1$ のときに $\sinh x \cong x$, $\cosh x \cong 1$, $\tanh x \cong x$ である.

[*7] 大きく見積もっても $z_0 \sim h$ である.

演習問題

1. (10.40) の極限のもとで, 分散関係式 (10.27) の漸近形を求めなさい. またそのときの流体粒子の軌道も求めなさい.
   ヒント: $x \gg 1$ のときの $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ の漸近形をもとめ, それを (10.27), (10.30), (10.31) に対して用いる.